ANALIZĂ MATEMATICĂ
Noţiuni teoretice şi probleme rezolvate

Mircea Olteanu

Cuprins

1 Serii de numere **7**
- 1.1 Noţiuni teoretice 7
- 1.2 Serii cu termeni pozitivi 15
- 1.3 Serii cu termeni oarecari 21

2 Spaţii metrice. Continuitate **29**
- 2.1 Noţini teoretice 29
- 2.2 Spaţii metrice 37
- 2.3 Teorema contracţiei 42
- 2.4 Funcţii continue 48
- 2.5 Spaţii normate şi operatori liniari 54

3 Şiruri de funcţii. Funcţii elementare **67**
- 3.1 Noţiuni teoretice 67
- 3.2 Şiruri şi serii de funcţii 72
- 3.3 Formula lui Taylor. Serii Taylor 86
- 3.4 Serii de puteri, funcţii elementare 95

4 Funcţii diferenţiabile **107**
- 4.1 Noţiuni teoretice 107
- 4.2 Derivate parţiale şi diferenţiala 112
- 4.3 Diferenţiala funcţiei compuse 126
- 4.4 Extreme locale 135
- 4.5 Funcţii implicite 141
- 4.6 Extreme cu legături 152

5 Integrale improprii şi cu parametri **161**
- 5.1 Noţiuni teoretice 161
- 5.2 Integrale improprii 166
- 5.3 Integrale cu parametri 169

6 Măsură şi integrală **181**
6.1 Noţiuni teoretice 181
6.2 Funcţii integrabile 192
6.3 Serii Fourier 201
6.4 Operatori pe spaţii Hilbert 213

7 Integrale duble şi triple **229**
7.1 Noţiuni teoretice 229
7.2 Integrale duble 232
7.3 Integrale triple 237

8 Integrale curbilinii şi de suprafaţă **243**
8.1 Noţiuni teoretice 243
8.2 Integrale curbilinii 249
8.3 Integrale de suprafaţă 258

9 Formule integrale **267**
9.1 Noţiuni teoretice 267
9.2 Formula Green-Riemann 269
9.3 Formula Gauss-Ostrogradski 274
9.4 Formula lui Stokes 281

10 Exemple de teste pentru examen **289**
10.1 Analiză matematică I 289
10.2 Analiză matematică II 294

Introducere

Această lucrare este rezultatul cursurilor şi seminariilor de analiză matematică ţinute de autor studenţilor anilor întâi ai Facultăţilor de Automatică şi Electronică din Universitatea Politehnica Bucureşti. Cartea este structurată în zece capitole, conţinând exerciţii rezolvate care acoperă programa cursului de analiză din primul şi al doilea semestru. În ultimul capitol sunt exemple de subiecte propuse la examenele de analiză matematică. Fiecare capitol începe cu o secţiune teoretică ce conţine principalele noţiuni şi rezultate necesare rezolvării exerciţiilor. Desigur, pentru înţelegerea conceptelor fundamentale ale analizei este necesară o pregătire teoretică suplimentară. Pentru aceasta, sunt recomandate cursurile care se adresează studenţilor din învătământul superior tehnic; o listă cu acestea se găseşte în bibliografia de la sfârşit, îndeosebi lucrările [4], [6], [9]. De asemenea, se recomandă consultarea şi a altor culegeri de probleme, de exemplu [11], [12], [13], [14].

Capitolul 1

Serii de numere

1.1 Noţiuni teoretice

Relaţii

Dacă M este o mulţime arbitrară nevidă, orice submulţime $\rho \subseteq M \times M$ se numeşte relaţie pe M. Se notează $x\rho y$ dacă $(x, y) \in \rho$.
Relaţia ρ se numeşte:
reflexivă dacă $x\rho x$, $\forall x \in M$;
simetrică dacă $x\rho y \Rightarrow y\rho x$;
antisimetrică dacă $x\rho y$ şi $y\rho x \Rightarrow x = y$;
tranzitivă dacă $x\rho y$ şi $y\rho z \Rightarrow x\rho z$.
O relaţie se numeşte relaţie de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.
Relaţia de ordine ρ (pe mulţimea M) se numeşte totală (sau se mai spune că mulţimea M este total ordonată) dacă pentru orice $x, y \in M$ rezultă $x\rho y$ sau $y\rho x$.
În cele ce urmează $(M, \leq)$ este o mulţime total ordonată, iar X este o submulţime nevidă a lui M. Un element $a \in M$ se numeşte majorant al mulţimii X dacă $x \leq a$, $\forall x \in X$. Dacă mulţimea majoranţilor lui X este nevidă, atunci X se numeşte majorată.
Un element $b \in M$ se numeşte minorant al lui X dacă $b \leq x$, $\forall x \in X$. Mulţimea X se numeşte minorată dacă mulţimea minoranţilor săi este nevidă.
Mulţimea X se numeşte mărginită dacă este şi majorată şi minorată.
Dacă X este o submulţime majorată a lui M, atunci un element $\alpha \in M$ se numeşte marginea superioară a lui X dacă:
i. $x \leq \alpha$, $\forall x \in X$; (α este majorant).
ii. dacă $x \leq \gamma$, $\forall x \in X$, atunci $\alpha \leq \gamma$; (α este cel mai mic majorant).

Analog se defineşte marginea inferioară a unei mulţimi minorate.
Notaţiile uzuale pentru marginea superioară şi marginea inferioară ale lui X (dacă există) sunt $\sup X$ şi, respectiv, $\inf X$.

Mulţimi de numere

Mulţimea $N = \{0, 1, 2, ...\}$ a numerelor naturale se defineşte axiomatic după cum urmează (axiomele lui Peano):
i. există $s : N \mapsto N$ funcţie injectivă (funcţia succesor);
ii. există $0 \in N$ astfel încât funcţia $s : N \mapsto N \setminus \{0\}$ este bijectivă;
iii. pentru orice submulţime $A \subseteq N$ cu proprietăţile

$$0 \in N \text{ şi } s(n) \in A, \forall n \in N,$$

rezultă $A = N$ (principiul inducţiei matematice).

Mulţimea numerelor întregi este $Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$, iar mulţimea numerelor raţionale este:
$Q = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0,$ cu convenţia $\frac{m}{n} = \frac{p}{k}$ dacă $mk = np\}$.

Prin definiţie, mulţimea numerelor reale R satisface axiomele următoare:
i. structura algebrică: există două operaţii (adunarea şi înmulţirea, notate $+$ şi $\cdot$) astfel încât $(R, +, \cdot)$ este corp comutativ;
ii. structura de ordine: există o relaţie de ordine totală pe R (notată $\leq$), compatibilă cu operaţiile algebrice:

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \ \forall x, y, z \in R$$

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow 0 \leq xy, \ \forall x, y \in R.$$

iii. axioma marginii superioare (Cantor): orice submulţime nevidă şi majorată a lui R are o margine superioară în R.

Modulul unui număr real $x \in R$ este $|x| = \begin{cases} x & \text{dacă} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{dacă} \quad x < 0 \end{cases}$

Mulţimea C a numerelor complexe este mulţimea perechilor ordonate de numere reale, $C = R \times R$. Cu operaţiile

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d) \text{ şi } (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc),$$

$(C, +, \cdot)$ este corp comutativ. Se notează $i = (0, 1)$ şi identificând perechile de forma $(a, 0)$ cu numărul real a, orice număr complex $z \in C$ se scrie $z = a + ib, a, b \in R$; prin calcul direct se obţine $i^2 = -1$.
Modulul numărului complex $z = a + ib$ este, prin definiţie, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; proprietăţile modulului sunt:
i. $|z| \geq 0, \forall z \in C$

ii. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
iii. $|z + w| \leq |z| + |w|$, $\forall z, w \in C$
iv. $|zw| = |z| \cdot |w|$, $\forall z, w \in C$.

Fie $z \in C$, $z \neq 0$; argumentul (redus) al lui z este, prin definiţie, unghiul $\varphi \in [0, 2\pi)$ făcut de semidreptele Ox şi Oz (în sens trigonometric pozitiv). Forma trigonometrică a lui z este $z = |z|(\cos\varphi + \sin\varphi)$.

Şiruri de numere

Un şir de numere reale (complexe) este orice aplicaţie $x : N \mapsto R$(respectiv C); notaţia uzuală este $x(n) = x_n$, $\forall n \in N$.
Dacă $\varphi : N \mapsto N$ este o funcţie strict crescătoare, atunci $x_{\varphi(n)}$ se numeşte subşir al şirului x_n.

Un şir de numere reale (sau complexe) se numeşte convergent dacă există un număr real (respectiv complex) a cu proprietatea:

$$\forall\, \epsilon > 0,\, \exists\, N(\epsilon) \in N \text{ astfel încât } \forall n \geq N(\epsilon),\ |x_n - a| < \epsilon.$$

În acest caz, numărul a se numeşte limita şirului şi se notează $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
Dacă există, limita este unică.
Un şir este convergent dacă şi numai dacă orice subşir al său este convergent.

Şirul x_n (de numere reale sau complexe) se numeşte mărginit dacă există $M > 0$ astfel încât $|x_n| \leq M,\ \forall\, n \in N$.

Şirul x_n de numere reale se numeşte monoton dacă $\forall n \in N,\ x_n \leq x_{n+1}$ (crescător), sau $\forall n \in N,\ x_n \geq x_{n+1}$ (descrescător).

Orice şir convergent este mărginit. Pentru şiruri de numere reale are loc şi următorul rezultat (teorema lui Weierstrass):

Orice şir monoton şi mărginit este convergent; dacă şirul este crescător, atunci limita este marginea sa superioară ($\sup x_n$), iar dacă şirul este descrescător, atunci limita este marginea sa inferioară ($\inf x_n$).

Un şir x_n se numeşte şir Cauchy (sau fundamental) dacă:

$$\forall \epsilon > 0,\, \exists\, N(\epsilon) \in N \ \text{ astfel încât } \forall n, m \geq N(\epsilon),\, |x_n - x_m| < \epsilon.$$

Mulţimea numerelor reale are următoarea proprietate de completitudine (criteriul general al lui Cauchy de convergenţă):
Un şir de numere reale este convergent (în R) dacă şi numai dacă este şir Cauchy.
Mulţimea numerelor raţionale nu are această proprietate: de exemplu, şirul (crescător şi mărginit de numere raţionale) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este şir Cauchy, dar nu are limită raţională. În schimb, există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in R$.

Şirurile de numere complexe convergente (Cauchy) se pot caracteriza cu ajutorul şirurilor de numere reale convergente (respectiv Cauchy):
i. $z_n = x_n + iy_n$ este şir (de numere complexe) convergent dacă şi numai dacă şirurile (de numere reale) x_n şi y_n sunt şiruri convergente. În acest caz, $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n$.
ii. $z_n = x_n + iy_n$ este şir Cauchy în C dacă şi numai dacă x_n şi y_n sunt şiruri Cauchy în R.

Mulţimea numerelor complexe are (ca şi mulţimea numerelor reale) proprietatea de completitudine: un şir de numere complexe este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy.

Se spune că un şir de numere reale x_n are limita ∞ dacă:
$\forall M > 0,\ \exists\, N_M \in N$ astfel încât $\forall\, n \geq N_M,\ x_n > M$.

Şirul de numere reale x_n are limita $-\infty$ dacă:
$\forall M < 0,\ \exists N_M \in N$ astfel încât $\forall\, n \geq N_M,\ x_n < M$.

Un şir de numere complexe z_n are limita ∞ dacă:
$\forall\, M > 0,\ \exists\, N_M \in N$ astfel încât $\forall n \geq N_M,\ |z_n| > M$.

Serii de numere

Fie x_n un şir de numere complexe şi fie $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ şirul sumelor parţiale asociat. Seria $\sum_n x_n$ se numeşte convergentă dacă şirul s_n este şir convergent; în caz contrar seria se numeşte divergentă. Dacă seria este convergentă, atunci limita şirului s_n este suma seriei, notată $\sum_n x_n$.

Seria $\sum_n x_n$ se numeşte absolut convergentă dacă seria $\sum_n |x_n|$ este serie convergentă. Orice serie absolut convergentă este convergentă, reciproca fiind falsă.
Dacă $x_n = u_n + iv_n, u_n \in R, v_n \in R$, atunci seria $\sum_n x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă seriile $\sum_n u_n$ şi $\sum_n v_n$ sunt ambele convergente.
Dăm în continuare două exemple remarcabile de serii.
Seria geometrică
Fie $z \in C$ (numit raţie) şi fie seria geometrică $\sum_{n\geq 0} z^n$. Atunci seria este convergentă dacă şi numai dacă $|z| < 1$. In acest caz suma seriei este:

$$\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Evident, dacă $z = 1$ seria este divergentă; pentru orice $z \in C,\ z \neq 1$ şirul sumelor parţiale este:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \forall\, z \neq 1.$$

De aici rezultă că s_n este convergent dacă şi numai dacă $|z| < 1$.

Seria lui Riemann (seria armonică generalizată)

Fie $\alpha \in R$ şi fie seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Seria dată este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha > 1$; în particular, seria armonică $\sum_n \frac{1}{n}$ este divergentă.

Fie $\alpha \leq 1$. Vom demonstra că şirul sumelor parţiale s_n este nemărginit, deci divergent; pentru orice $n \in N$, avem inegalităţile:

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{2^{n\alpha}} \geq 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^n} \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\left(+\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + ...$$

$$... + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + ... + \frac{1}{2^n}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + ... + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} \to \infty.$$

Fie acum $\alpha > 1$; este suficient să arătăm că şirul sumelor parţiale este mărginit (fiind crescător, rezultă convergent). Pentru orice $n \in N$ avem inegalităţile:

$$s_{2^n-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + ...+$$

$$+ \left(\frac{1}{2^{(n-1)\alpha}} + \frac{1}{2^{(n-1)\alpha}+1} + ... + \frac{1}{2^{n\alpha}-1}\right) \leq$$

$$\leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^\alpha} + 4 \cdot \frac{1}{4^\alpha} + 8 \cdot \frac{1}{8^\alpha} + ... + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{(n-1)\alpha}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}} + \frac{1}{2^{3(\alpha-1)}} + ... + \frac{1}{2^{(n-1)(\alpha-1)}} \leq \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.$$

De aici rezultă că şirul s_n este mărginit.

Criterii de convergenţă pentru serii de numere

1. Criteriul general al lui Cauchy.

Fie $z_n \in C$ un şir de numere complexe; atunci seria $\sum_n z_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, N(\varepsilon) \in N$ cu proprietatea

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + ... + z_{n+p}| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq N(\varepsilon), \forall\, p \in N.$$

2. Criteriul comparaţiei

Fie $u_n \geq v_n \geq 0$.

a. Dacă seria $\sum_n u_n$ este convergentă, atunci şi seria $\sum_n v_n$ este convergentă.

b. Dacă seria $\sum_n v_n$ este divergentă, atunci şi seria $\sum_n u_n$ este divergentă.

3. Criteriul de comparaţie la limită

Fie $u_n > 0$ şi $v_n > 0$.

a. Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$ există şi este un număr real nenul, atunci cele două serii au aceeaşi natură.

b. În particular, dacă $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$, atunci obţinem criteriul de comparaţie la limită cu seria lui Riemann:

Fie $\ell = \lim_{n\to\infty} n^\alpha u_n$.

i. Dacă $\alpha > 1$ şi $\ell \in R$, (ℓ poate fi şi 0), atunci seria $\sum_n u_n$ este convergentă.

ii. Dacă $\alpha \leq 1$ şi $\ell > 0$,(ℓ poate fi şi ∞) atunci seria $\sum_n u_n$ este divergentă.

4. Criteriul raportului (al lui D'Alembert)

Fie $u_n > 0$; presupunem că există $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$

a. Dacă $\ell < 1$, atunci seria $\sum_n u_n$ este convergentă.

b. Dacă $\ell > 1$, atunci seria $\sum_n u_n$ este divergentă.

O variantă (mai generală) a acestui criteriu este:

Dacă există $c \in (0, 1)$ şi $n_0 \in N$ astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < c, \forall\, n \geq n_0,$$

atunci seria $\sum_n u_n$ este convergentă.

5. Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy)

Fie $u_n > 0$; presupunem că există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

a. Dacă $\ell < 1$, atunci seria $\sum_n u_n$ este convergentă.

b. Dacă $\ell > 1$, atunci seria $\sum_n u_n$ este divergentă.

O variantă (mai generală) a acestui criteriu este:
Dacă există $c \in (0,1)$ şi $n_0 \in N$ astfel încât

$$\sqrt[n]{u_n} < c, \forall\, n \geq n_0,$$

atunci seria $\sum_n u_n$ este convergentă.

6. Criteriul Raabe-Duhamel

Fie $u_n > 0$; presupunem că există
$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \ell.$

a. Dacă $\ell > 1$, atunci seria $\sum_n u_n$ este convergentă.

b. Dacă $\ell < 1$, atunci seria $\sum_n u_n$ este divergentă.

7. Criteriul logaritmic

Fie $u_n > 0$; presupunem că există $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = \ell.$

a. Dacă $\ell > 1$, atunci seria $\sum_n u_n$ este convergentă.

b. Dacă $\ell < 1$, atunci seria $\sum_n u_n$ este divergentă.

8. Criteriul condensării

Fie $u_n \geq u_{n+1} \geq 0$, $\forall n \in N$. Atunci seriile

$$\sum_n u_n \text{ şi } \sum_n 2^n u_{2^n}$$

au aceeaşi natură.

9. Criteriul integral

Fie $f : (0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ o funcţie descrescătoare şi fie şirul

$$a_n = \int_1^n f(t)dt.$$

Atunci seria $\sum_n f(n)$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul a_n este convergent.

10. Criteriul lui Leibniz

Fie $u_n \geq 0$ şi fie seria alternată $\sum_n (-1)^n u_n$. Dacă şirul u_n este descrescător şi are limita zero, atunci seria este convergentă.

11. Criteriul Abel-Dirichlet

Fie a_n un şir descrescător cu $a_n \to 0$ şi fie u_n un şir de numere complexe

astfel încât şirul sumelor parţiale $\sum_{k=1}^{n} u_k$ este mărginit. Atunci seria $\sum_n a_n u_n$ este convergentă.

Convergenţă condiţionată
O serie convergentă $\sum_n u_n$ se numeşte necondiţionat convergentă dacă pentru orice permutare (funcţie bijectivă) $\sigma : N \mapsto N$, seria $\sum_n u_{\sigma(n)}$ este de asemenea convergentă; altfel, seria se numeşte condiţionat convergentă.

Dăm în continuare două rezultate remarcabile cu privire la convergenţa condiţionată:
Teorema lui Dirichlet
Orice serie absolut convergentă este necondiţionat convergentă.
Teorema lui Riemann
Fiind date o serie convergentă, dar nu absolut convergentă şi $S \in R \cup \{\pm\infty\}$, atunci există o permutare a termenilor seriei iniţiale astfel încât suma noii serii să fie S.

Aproximarea sumelor seriilor convergente
Evident, suma unei serii convergente se poate aproxima cu termenii şirului sumelor parţiale. Dăm mai jos două rezultate în acest sens.
Aproximarea sumelor seriilor cu termeni pozitivi

Fie $u_n \geq 0$ şi fie $k \geq 0$ astfel încât $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k < 1, \forall n \in N$. Dacă S este suma seriei convergente $\sum_{n\in N} u_n$, iar $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$ este suma primilor $n+1$ termeni, atunci:

$$|S - s_n| < \frac{k}{1-k} u_n.$$

Aproximarea sumelor seriilor alternate
Fie $\sum_{n\in N} (-1)^n u_n$ o serie alternată convergentă, şi fie S suma sa.
Dacă $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ este suma primilor $n+1$ termeni, atunci

$$|S - S_n| \leq u_{n+1}.$$

1.2 Serii cu termeni pozitivi

Să se studieze natura următoarelor serii cu termeni pozitivi definite de şirul x_n (exerciţiile 1-30):

1. $x_n = \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$

Soluţie

Seria diverge; se aplică criteriul necesar: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \neq 0$.

2. $x_n = \frac{1}{n!}$

Soluţie

Seria converge; se apoate aplica criteriul comparaţiei:

$$x_n \leq \frac{1}{2^n}, \forall\, n \geq 4.$$

3. $x_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

Soluţie

Aplicăm criteriul de comparaţie la limită: $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} x_n = 1$, deci seria converge.

4. $x_n = \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{n^a}$, $a \in R$

Soluţie

$\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha x_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha \frac{1}{n^a(\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2})}$.

Alegând $\alpha = a + \frac{2}{3}$, se obţine limita $\frac{1}{3}$ (finită şi nenulă) şi deci, conform criteriului de comparaţie la limită, seria este convergentă dacă şi numai dacă $a > \frac{1}{3}$.

5. $x_n = \frac{n^a}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}, a \in R$

Soluţie

Se amplifică cu conjugata şi se procedează ca în exemplul precedent.

6. $x_n = \sqrt{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Soluţie

Se compară la limită cu $\frac{1}{\sqrt{n}}$; seria este divergentă.

7. $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right)$

Soluţie

Se compară la limită cu $\dfrac{1}{n^2}$.

8. $x_n = \dfrac{1}{n^a} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^b}\right),\ a, b \in R$

Soluţie

Se compară la limită cu $\dfrac{1}{n^{b-a}}$.

9. $x_n = \dfrac{\ln(n+2)}{\sqrt{n^3+1}}$

Soluţie

Pentru orice $\alpha \in (1, \frac{3}{2})$ se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha x_n = 0$ şi deci seria este convergentă.

10. $x_n = \dfrac{n!}{n^{2n}}$

Soluţie

Aplicăm criteriul lui D$'$Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = \frac{1}{e^2} < 1,$$

deci seria converge.

11. $x_n = n! \left(\dfrac{a}{n}\right)^n, a \in R$

Soluţie

Se aplică criteriul raportului:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} a \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{a}{e}$$

Dacă $a < e$, atunci seria este convergentă; dacă $a > e$, atunci seria este divergentă. Pentru $a = e$, aplicăm criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{e} - 1\right) =$$

$$= n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{e} - 1\right) = \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{1}{n}}.$$

Ultima limită se calculează aplicând regula lui L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}-1}[x - (1+x)\ln(1+x)]}{x^2} = -\frac{e}{2};$$

rezultă că seria este divergentă.
Observaţie: pentru $a = e$, divergenţa seriei se poate demonstra şi aplicând criteriul necesar: şirul x_n nu converge la zero.

12. $x_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

Soluţie
Seria este convergentă; se aplică criteriul raportului.

13. $x_n = (2n+1)\left(\dfrac{a(a-1)...(a-n+1)}{(a+1)(a+2)...(a+n+1)}\right)^2$, $a \notin Z$.

Soluţie
Aplicând criteriul raportului, rezultă:
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+3)(a-n)^2}{(2n+1)(a+n+2)^2} = 1$. Cu criteriul Raabe-Duhamel, se obţine: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = 4a + 3$. Dacă $a > -\frac{1}{2}$, atunci seria converge; dacă $a < -\frac{1}{2}$, seria diverge; dacă $a = -\frac{1}{2}$, atunci $x_n = \frac{2}{2n+1}$ şi deci seria diverge.

14. $x_n = \dfrac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)}$, $a > -1$.

Soluţie
Criteriul raportului nu decide; aplicând criteriul Raabe-Duhamel, se obtine:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a+n+1}{n+1} - 1\right) = a,$$

deci pentru $a < 1$ seria diverge, iar pentru $a > 1$ converge; dacă $a = 1$, se obţine seria armonică (divergentă).

15. $x_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5....(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6...2n}$.

Soluţie
Seria este divegentă (criteriul Raabe-Duhamel).

16. $x_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5....(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6...2n} \cdot \dfrac{1}{2n+1}$

Soluţie
Se aplică criteriul lui Raabe-Duhamel: seria este convergentă.

17. $x_n = \left(1 - \dfrac{3\ln n}{2n}\right)^n$

Soluţie
Criteriul rădăcinii nu decide; aplicând criteriul logaritmic, se obţine:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1-\frac{3\ln n}{2n})^{-n}}{\ln n} = \frac{3}{2},$$

deci seria converge.

18. $x_n = \left(\dfrac{n+1}{3n+1}\right)^n$

Soluţie
Seria converge; se aplică criteriul rădăcinii.

19. $x_n = \left(\dfrac{an+1}{bn+1}\right)^n$, $a>0$, $b>0$

Soluţie
Aplicând criteriul rădăcinii se obţine:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{a}{b}.$$

Dacă $a<b$, atunci seria converge, iar dacă $a>b$ seria diverge. Dacă $a=b$, atunci seria diverge (criteriul necesar).

20. $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}a^n & \text{dacă } n \text{ par} \\ na^n & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}$, $a>0$

Soluţie
Aplicând criteriul rădăcinii, se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = a$, deci dacă $a<1$, seria este convergentă, iar dacă $a>1$, seria este divergentă; pentru $a=1$, seria este divergentă (criteriul necesar). Să mai observăm că pentru această serie, criteriul raportului nu decide.

21. $x_n = \dfrac{\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{n}}}{n\ln(n+1)}$

Soluţie
$x_n = \dfrac{\sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}}{n\ln(n+1)} = \dfrac{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2n}}{n\ln(n+1)} < \dfrac{\sqrt{2}\frac{\pi}{2n}}{n\ln(n+1)} < \dfrac{1}{n^2}$, deci seria converge.

22. $x_n = \dfrac{\ln n \cdot \ln(1+\frac{1}{n})}{n}$

Soluţie
$x_n < \frac{\frac{1}{n}\ln n}{n} = \frac{\ln n}{n^2}$. Se aplică acum criteriul logaritmic:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n^2}{\ln n}\right)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}\right) = 2,$$

deci seria converge.

23. $x_n = \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\ln(\ln n)}$.

Soluţie
Se aplica criteriul logaritmic:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\ln n\right)^{\ln(\ln n)}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\ln(\ln n)\right)^2}{\ln n} = 0,$$

deci seria diverge.

24. $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$.

Soluţie
Din inegalitatea $n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \forall\, n \geq 3$ rezultă $\sqrt[n]{n} - 1 > \frac{1}{n}$, deci seria este divergentă.

25. $x_n = \frac{1}{n\ln n}$.

Soluţie
Se aplică criteriul integral:

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{1}{x\ln x} dx = \lim_{n\to\infty} \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)) = \infty,$$

deci seria diverge.

26. $x_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$

Soluţie
Seria converge (se aplică criteriul integral).

27. $x_n = \frac{a^n (n!)^2}{(2n)!}, a > 0$

Soluţie
Se aplică criteriul raportului:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{a}{4}.$$

Rezultă că pentru $a \in (0,4)$ seria converge, iar pentru $a > 4$, seria diverge. Pentru $a = 4$, se aplică criteriul Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2}-1\right)=-\frac{1}{2},$$

deci seria diverge.

28. $x_n = \dfrac{a(a+1)...(a+n-1)}{b(b+1)...(b+n-1)}(c-2)^n, a>0, b>0, c>2$

Soluţie
Se aplică criteriul raportului:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+n}{b+n}(c-2)=c-2,$$

deci pentru $2 < c < 3$ seria converge, şi pentru $c > 3$ seria diverge; dacă $c = 3$, se aplică criteriul Raabe-Duhamel şi rezultă: dacă $b - a < 1$ seria diverge, dacă $b - a > 1$, seria converge. Dacă $b - a = 1$, atunci seria este divergentă (seria armonică).

29. $x_n = \dfrac{1}{n^p \ln^q n}, p>0, q>0.$

Soluţie
Dacă $p > 1$, atunci seria converge pentru orice $q > 0$ deoarece (se aplică criteriul comparaţiei):

$$x_n \le \frac{1}{n^p}.$$

Dacă $p = 1$, se aplică criteriul integral: seria converge dacă şi numai dacă $q > 1$.
Dacă $p < 1$ se aplică criteriul de condensare: seria are aceeaşi natură cu seria cu termenul general $\dfrac{1}{n^q 2^{n(p-1)} \ln^q 2}$, care este divergentă pentru orice $q > 0$ (se poate aplica criteriul raportului).

30. $x_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\sin\dfrac{\pi}{n}, \alpha \in R$

Soluţie
Aplicând criteriul de comparaţie la limită, rezultă că seria are aceeaşi natură cu seria $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^{\alpha+1}}$.

1.3 Serii cu termeni oarecari

Să se studieze convergenţa şi absolut convergenţa seriilor definite de şirul x_n (exerciţiile 31-50):

31. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

Soluţie

Seria nu este absolut convergentă (seria modulelor este seria armonică), dar este convergentă (cu criteriul lui Leibniz): $\frac{1}{n}$ este descrescător la 0.

32. $x_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{dacă} \quad n \text{ impar} \\ \frac{1}{2^n} & \text{dacă} \quad n \text{ par} \end{cases}$

Soluţie

Să observăm mai întâi că nu se poate aplica criteriul lui Leibniz; şirul

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dacă} \quad n \text{ impar} \\ \frac{1}{2^n} & \text{dacă} \quad n \text{ par} \end{cases}$$

tinde la zero dar nu este descrescător. Vom arăta acum că seria este divergentă, deci condiţia de monotonie din ipoteza criteriului lui Leibniz este necesară. Şirul sumelor parţiale are un subşir divergent:

$$s_{2n} = -\left(1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + ... + \frac{1}{2^{2n}}\right) \to -\infty,$$

deci seria este divergentă (conform criteriului necesar).

33. $x_n = \begin{cases} -\frac{1}{n^2} & \text{dacă} \quad n \text{ impar} \\ \frac{1}{n^3} & \text{dacă} \quad n \text{ par} \end{cases}$

Soluţie

Seria este absolut convergentă.

Pe de altă parte, şirul $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{dacă} \quad n \text{ impar} \\ \frac{1}{n^3} & \text{dacă} \quad n \text{ par} \end{cases}$ nu este descrescător, ceea ce arată că criteriul lui Leibniz nu este necesar pentru convergenţa unei serii alternate.

34. $x_n = (-1)^n$

Soluţie

Seria este divergentă: se aplică criteriul necesar.

35. $x_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

Soluţie

Seria este alternată:

$$x_n = (-1)^n \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1} - n\pi\right) = (-1)^n \sin\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}.$$

Seria este convergentă (cu criteriul lui Leibniz).

36. $x_n = \dfrac{\sin nx}{n}, x \in R$

Soluţie

Dacă $x = k\pi, k \in Z$, atunci $x_n = 0, \forall n \in N$; presupunem în continuare că $x \neq k\pi, k \in Z$. Arătăm mai întâi că seria nu este absolut convergentă:

$$|x_n| = \frac{|\sin(nx)|}{n} \geq \frac{\sin^2(nx)}{n} = \frac{1-\cos(2nx)}{2n}, \forall n \in N^\star.$$

Deci, presupunând prin absurd că seria dată ar fi absolut convergentă, ar rezulta (cu criteriul de comparaţie) că şi seria $\displaystyle\sum_n \frac{1-\cos(2nx)}{2n}$ ar fi convergentă. Seria $\displaystyle\sum_n \frac{\cos(2nx)}{2n}$ este convergentă (aplicăm criteriul Abel-Dirichlet): fie $a_n = \frac{1}{2n}$ şi $u_n = \cos(2nx)$. Atunci a_n este descrescător la 0, iar u_n are şirul sumelor parţiale mărginit:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos(2nx)\right| = \left|\frac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{\sin x}\right| \leq \frac{1}{|\sin x|}.$$

Rezultă că şi seria $\displaystyle\sum_n \frac{1}{2n}$ ar trebui să fie convergentă, fiind suma a două serii convergente: contradicţie.

Arătăm acum că seria este convergentă, tot cu criteriul Abel-Dirichlet; fie $a_n = \frac{1}{n}$ şi $u_n = \sin(nx)$. Atunci a_n este descrescător la 0, iar u_n are şirul sumelor parţiale mărginit:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| = \left|\frac{\sin\frac{nx}{2} \cdot \sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}.$$

37. $x_n = \dfrac{\sin nx}{n^\alpha}, x \in R, \alpha \in R$

Soluţie

Dacă $x = k\pi, k \in Z$, atunci $x_n = 0$; presupunem $x \neq k\pi, k \in Z$. Dacă $\alpha \leq 0$,

atunci x_n nu converge la 0, deci seria diverge. Presupunem $\alpha > 0$. Dacă $\alpha > 1$, atunci seria este absolut convergentă (cu criteriul de comparaţie): $|x_n| \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$.
Dacă $\alpha \in (0, 1]$, atunci seria nu este absolut convergentă (am demonstrat în exerciţiul anterior că pentru $\alpha = 1$ seria nu este absolut convergentă), dar este convergentă (cu criteriul Abel-Dirichlet).

38. $x_n = (-1)^n \sqrt[n]{n} \sin \dfrac{1}{n}$

Soluţie
Seria nu este absolut convergentă (se compară la limită cu seria armonică). Seria este alternată; vom demonstra că şirul $a_n = \sqrt[n]{n} \sin \dfrac{1}{n}$ este descrescător la 0, deci seria converge.
Evident $a_n \to 0$; pentru a arăta că a_n este descrescător (începând de la un rang suficient de mare), fie funcţia $f(x) = x^{\frac{1}{x}} \sin \dfrac{1}{x}$. Calculăm

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2} \left((1 - \ln x) \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right).$$

Pentru a studia semnul derivatei (pentru x "mare"), calculăm:

$$\lim_{x\to\infty} (1 - \ln x) \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} = -1 + \lim_{x\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x} = -1,$$

deci $f'(x) < 0$ pentru x suficient de mare, deci şirul a_n este descrescător.

39. $x_n = \dfrac{n(2+i)^n}{3^n}$

Soluţie
Seria este absolut convergentă:

$$|x_n| = \frac{|n(2+i)^n|}{3^n} = n \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^n,$$

ultima serie fiind convergentă (criteriul raportului sau al rădăcinii).

40. $x_n = \dfrac{1}{n+i}$

Soluţie
Seria este divergentă;

$$x_n = \frac{1}{n+i} = \frac{n-i}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} - i\frac{1}{n^2+1}.$$

Seriile $\sum_n \frac{n}{n^2+1}$ şi $\sum_n \frac{1}{n^2+1}$ nu sunt ambele convergente (prima diverge, a doua converge), deci seria din enunţ diverge.

41. $x_n = \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$

Soluţie

Seria este absolut convergentă: $|x_n| = \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$; se compară la limită cu seria armonică.

42. $x_n = \frac{z^n}{n}, z \in C$

Soluţie

Dacă $|z| < 1$, atunci seria este absolut convergentă (cu criteriul raportului). Dacă $|z| > 1$, atunci seria este divergentă, deoarece x_n nu converge la 0. Studiem acum cazul $|z| = 1$; fie $z = e^{it}, t \in R$. Atunci

$$x_n = \frac{e^{int}}{n} = \frac{\cos(nt)}{n} + i\frac{\sin(nt)}{n}.$$

Seria nu este absolut convergentă deoarece $|x_n| = \frac{1}{n}$. Dacă $t = 2k\pi, k \in Z$, atunci seria este divergentă: $x_n = \frac{1}{n}$. Dacă $t \neq 2k\pi$, atunci seriile $\sum_n \frac{\cos(nt)}{n}$ şi $\sum_n \frac{\sin(nt)}{n}$ sunt ambele convergente (cu criteriul Abel-Dirichlet, ca în exerciţiul 36).

43. $x_n = \frac{z^n}{n!}, z \in C$

Soluţie

Seria este absolut convergentă.

44. $x_n = \frac{z^n}{n^\alpha}, z \in C, \alpha \in R$

Soluţie

Dacă $|z| < 1$, seria este absolut convergentă pentru orice $\alpha \in R$; dacă $|z| > 1$, atunci seria este divergentă pentru orice $\alpha \in R$. Dacă $|z| = 1$, şi $\alpha > 1$, seria converge absolut, iar dacă $\alpha \leq 0$, seria diverge. In cazul $|z| = 1$ şi $\alpha \in (0, 1]$ se procedează ca în exerciţiile 36,37 şi 42.

45. $x_n = \sin\frac{1}{n^2} + i(-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Soluţie
Seria este convergentă deoarece seriile:

$$\sum_n \sin\frac{1}{n^2} \text{ şi } \sum_n (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

sunt convergente (se aplică criteriul de comparaţie la limită cu $\frac{1}{n^2}$ şi, respectiv, criteriul lui Leibniz); seria nu este absolut convergentă (se aplică criteriul de comparaţie la limită cu $\frac{1}{n}$ pentru seria modulelor).

46. $x_n = \dfrac{a+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$, $a \in R$

Soluţie
Dacă $a = 0$ seria este convergentă dar nu este absolut convergentă. Dacă $a \neq 0$, atunci seria este divergentă.

47. $x_n = \dfrac{a\sqrt[3]{n}+b(-1)^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$

Soluţie
Dacă $b = 0$ seria este absolut convergentă pentru orice $a \in R$. Dacă $b \neq 0$, atunci seria este convergentă dar nu este absolut convergentă $\forall a \in R$.

48. $x_{2n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-1}$ şi $x_{2n} = -\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+1}$

Soluţie
Seria este divergentă: $\sum\limits_{n\geq 1}(x_{2n-1}+x_{2n}) = \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{2}{n}$.

49. $x_{2n-1} = \dfrac{1}{3^{n-1}}$ şi $x_{2n} = -\dfrac{1}{5^n}$

Soluţie
Seria este absolut convergentă:

$$\sum_{n\geq 1}|x_n| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^{n-1}} + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{5^n}.$$

50. $x_{2n-1} = \dfrac{1}{5n-3}$ şi $x_{2n} = -\dfrac{1}{5n-3}$

Soluţie
Seria este convergentă dar nu absolut convergentă:

$$\sum_{n\geq 1}(x_{2n+1}+x_{2n}) = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{5n-3}-\frac{1}{5n-1}\right) = \sum_n \frac{2}{(5n-3)(5n-1)}.$$

51. În seria convergentă $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$ să se permute ordinea termenilor astfel încât să se obţină o serie convergentă dar cu o altă sumă.

Soluţie

Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ este convergentă şi suma sa este un număr nenul $S>0$. Menţionăm că suma acestei serii este $\ln 2$, dar acest rezultat nu se va folosi în raţionamentul următor. Fie deci:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...=S$$

Înmulţind egalitatea de mai sus cu $\frac{1}{2}$, rezultă:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+...=\frac{1}{2}S$$

Însumăm acum cele două egalităţi grupând termenii astfel:

$$1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{5}+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{7}+$$
$$+\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{11}+...=\frac{3}{2}S.$$

Seria de mai sus este (după efectuarea calculelor din paranteze):

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-....=\frac{3}{2}S,$$

care este o permutare a seriei iniţiale.

Să se aproximeze cu o eroare mai mică decât ϵ sumele seriilor definite de şirul x_n (exerciţiile 52-56)

52. $x_n=\frac{(-1)^n}{n!}, \epsilon=10^{-3}$

Soluţie

În cazul seriilor alternate, eroarea este mai mică decât primul termen neglijat; deci cea mai mică soluţie a inecuaţiei $|x_n|<\epsilon$ este rangul primului termen neglijat. Obţinem: $\frac{1}{n!}<10^{-3}\Rightarrow n=7$, deci

$$S\approx\sum_{k=0}^{6}\frac{(-1)^k}{k!}=0,36805.$$

53. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3\sqrt{n}}$, $\epsilon = 10^{-2}$.

Soluţie

$n^3\sqrt{n} > 100 \Rightarrow n = 4$, deci $S \approx \sum_{k=2}^{3} \dfrac{1}{n^3\sqrt{n}} = 0,06725$.

54. $x_n = \dfrac{1}{n!}, \epsilon = 10^{-3}$

Soluţie

Dacă S este suma seriei şi $s_n = \sum_{k\geq 0} \dfrac{1}{k!}$, atunci

$$S - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + ... \leq \frac{1}{n!}\frac{1}{n} < 10^{-3} \Rightarrow n = 6,$$

deci $S \approx 2,7166$.

55. $x_n = \dfrac{1}{n!2^n}, \epsilon = 10^{-4}$

Soluţie

Fie S suma seriei şi s_n suma primilor termeni. Aplicăm rezultatul cu privire la aproximarea unei serii cu termeni pozitivi (a se vedea secţiunea teoretică); pentru aceasta, evaluăm:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2n+2} < \frac{1}{6} = k, \forall\, n \geq 2,$$

deci $S - s_n \leq x_n \dfrac{k}{1-k} = \dfrac{1}{n!2^n}\dfrac{1}{5} < 10^{-4} \Rightarrow n = 5$.

Aproximarea cerută este $S \approx s_5 = \sum_{k=1}^{5} \dfrac{1}{k^2 k!} = 1,146463..$

56. $x_n = \dfrac{1}{n^4(2n)!}, \epsilon = 10^{-6}$

Soluţie

Aplicăm acelaşi procedeu ca în exerciţiul anterior:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^4 \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} < \frac{1}{56} = k,\ \forall\, n \geq 3.$$

Rezultă $S - s_n \leq x_n \dfrac{k}{1-k} \leq \dfrac{1}{56} x_n$; din condiţia:

$$x_n \frac{k}{1-k} = \frac{1}{56} x_n < 10^{-6},$$

rezultă $n \geq 4$, deci $S \approx x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,5026212$.

Capitolul 2

Spaţii metrice. Continuitate

2.1 Noţini teoretice

Spaţii metrice

Fie X o mulţime nevidă; o aplicaţie $d : X \times X \mapsto R$ se numeşte distanţă (metrică) pe X dacă:

i. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in R$

ii. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

iii. $d(x, y) = d(y, x)\, \forall x, y \in X$.

iv. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Perechea (X, d) se numeşte spaţiu metric.

Dacă $Y \subseteq X$ este o submulţime nevidă, atunci (Y, d) se numeşte subspaţiu metric indus.

Un şir $x_n \in X$ se numeşte convergent dacă există $a \in X$ astfel încât

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in N \text{ cu proprietatea } d(x_n, a) < \epsilon, \forall n \geq n_\epsilon.$$

În acest caz a se numeşte limita şirului şi se notează $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ sau $x_n \to a$.

Un şir $x_n \in X$ se numeşte şir Cauchy (fundamental) dacă

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in N \text{ astfel încât } d(x_n, x_m) < \epsilon, \forall n, m \geq n_\epsilon.$$

Un spaţiu metric se numeşte complet dacă orice şir Cauchy este convergent.

Fie d_1 şi d_2 două distanţe pe o aceeaşi mulţime X. Metricele d_1 şi d_2 se numesc echivalente dacă există $\alpha > 0$ şi $\beta > 0$ astfel încât

$$d_1(x, y) \leq \alpha d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y), \forall x, y \in X.$$

In acest caz, (dacă d_1 şi d_2 sunt echivalente), se demonstrează că un şir $x_n \in X$ este convergent (respectiv Cauchy) în spaţiul metric (X, d_1) dacă şi

numai dacă este convergent (respectiv Cauchy) în spaţiul metric (X, d_2).

Mulţimi remarcabile în spaţii metrice

Fie $a \in X$ şi $r > 0$; bila deschisă de centru a şi rază r este, prin definiţie, mulţimea

$$B(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) < r\}.$$

Sfera de centru a şi rază r este definită prin

$$S(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) = r,$$

iar bila închisă de centru a şi rază r este

$$\overline{B(a,r)} = B(a,r) \cup S(a,r) = \{x \in X \mid d(x,a) \leq r\}.$$

O submulţime $D \subseteq X$ se numeşte deschisă dacă $\forall a \in D, \exists\, r > 0$ astfel încât $B(a,r) \subseteq D$.

O submulţime $F \subseteq X$ se numeşte închisă dacă $X \setminus D$ (complementara) este mulţime deschisă.

Se poate demonstra următoarea caracterizare cu şiruri a mulţimilor închise: F este închisă dacă şi numai dacă pentru orice şir convergent $x_n \in F$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in F$.

O submulţime $M \subseteq X$ se numeşte mărginită dacă există $a \in X$ şi $r > 0$ astfel încât $M \subseteq B(a,r)$.

O mulţime $K \subseteq X$ se numeşte compactă dacă pentru orice familie de mulţimi deschise $(D_i)_{i\in J}$ cu proprietatea $\bigcup\limits_{i\in J} D_i \supseteq K, \exists I \subseteq J$, I finită astfel încât $\bigcup\limits_{i\in I} D_i \supseteq K$.

Spaţiul metric X se numeşte conex dacă nu există două submulţimi simultan deschise (sau închise) D_1 şi D_2 cu proprietăţile:

$$D_1 \neq \emptyset,\ D_2 \neq \emptyset,\ X = D_1 \cup D_2 \text{ şi } D_1 \cap D_2 = \emptyset.$$

O submulţime $A \subseteq X$ se numeşte conexă dacă spaţiul metric (indus) (A, d) este conex. Rezultă următoarea caracterizare a submulţimilor conexe: o submulţime $A \subseteq X$ este conexă dacă şi numai dacă nu există două submulţimi deschise D_1 şi D_2 astfel încât $D_1 \cap D_2 = \emptyset,\ D_1 \cap A \neq \emptyset,\ D_2 \cap A \neq \emptyset$ şi $A \subseteq D_1 \cup D_2$.

Fie $A \subseteq X$ şi fie $a \in X$. Punctul a se numeşte punct de acumulare al mulţimii A dacă pentru orice $r > 0$, avem $B(a,r) \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$. Caracterizarea cu şiruri a punctelor de acumulare este:

Punctul $a \in X$ este punct de acumulare al mulţimii A dacă şi numai dacă există un şir $x_n \in A$ astfel încât $x_n \neq a \, \forall n \in N$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Un punct al mulţimii A se numeşte punct izolat al lui A dacă nu este punct de acumulare al lui A. Mulţimea A se numeşte perfectă dacă este închisă şi nu conţine puncte izolate.
Mulţimile finite nu au puncte de acumulare. În plus, se poate demonstra că orice mulţime perfectă este nenumărabilă.

Funcţii continue
Fie (X, d) şi (Y, d') două spaţii metrice.
O aplicaţie $f : X \mapsto Y$ se numeşte continuă în punctul $a \in X$ dacă

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 \text{ astfel încât } \forall x \in X \text{ cu proprietatea } d(x, a) < \delta_\epsilon \text{ rezultă}$$

$$d'(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

O formulare echivalentă (cu şiruri) este:
f este continuă în a dacă şi numai dacă pentru orice şir $x_n \in X$ cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.
Funcţia f se numeşte continuă (pe X) dacă este continuă în orice punct $a \in X$.
Caracterizarea funcţiilor continue
Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
i. Aplicaţia $f : X \mapsto Y$ este continuă.
ii. Aplicaţia f întoarce mulţimi deschise în mulţimi deschise, i.e.:
pentru orice submulţime deschisă $D \subseteq Y$ rezultă că $f^{-1}(D)$ este submulţime deschisă în X.
iii. Aplicaţia f întoarce mulţimi închise în mulţimi închise, i.e. pentru orice submulţime închisă $D \subseteq Y$ rezultă că $f^{-1}(D)$ este submulţime închisă în X.
Uniform continuitate
O aplicaţie $f : X \mapsto Y$ se numeşte uniform continuă (pe X) dacă:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 \text{ astfel încât } d(x, y) < \delta_\epsilon \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Proprietăţi ale funcţii continue
Fie $f : X \mapsto Y$ o funcţie continuă; atunci:
Dacă A este mulţime compactă atunci $f(A)$ este mulţime compactă.
Dacă X este conex, atunci $f(X)$ este conex (ca subspaţiu al lui Y).
Dacă X este spaţiu metric compact, atunci f este uniform continuă pe X.

Principiul contracţiei, metoda aproximaţiilor succesive
Fie (X, d) un spaţiu metric şi fie $f : X \mapsto X$. Aplicaţia f se numeşte contracţie (pe X) dacă există $k \in [0, 1)$ astfel încât:

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y), \forall x, y \in X.$$

Numărul k se numeşte factor de contracţie.
Teorema de punct fix a lui Banach
Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi fie $f : X \mapsto X$ o contracţie de factor k. Atunci există un unic punct $\xi \in X$ astfel încât $f(\xi) = \xi$.
Punctul ξ de mai sus se numeşte punct fix al aplicaţiei f.

Construcţia lui se face astfel: fie $x_0 \in X$, arbitrar fixat şi fie şirul (numit şirul aproximaţiilor succesive) definit prin recurenţă $x_{n+1} = f(x_n)$. Se demonstrează că şirul x_n este convergent şi limita sa este punctul fix căutat. În plus, are loc formula (evaluarea erorii):

$$d(x_n, \xi) \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x_0, x_1), \forall n \in N.$$

Exemple uzuale de spaţii metrice

a. Mulţimea numerelor reale, R, este spaţiu metric cu distanţa uzuală

$$d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in R.$$

Se poate demonstra că singurele mulţimi conexe din R sunt intervalele.

b. Pe mulţimea numerelor complexe, C, distanţa uzuală este

$$d(z, w) = |z - w|, \forall z, w \in C.$$

c. Fie $R^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \,|\, x_j \in R\}$. Distanţa uzuală (euclidiană):

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}, \quad \text{unde } x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y = (y_1, y_2, ..., y_n).$$

În R^n o mulţime este compactă dacă şi numai dacă este închisă şi mărginită.

d. Fie $C^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \,|\, x_j \in C\}$. Distanţa uzuală (euclidiană):

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2},$$

cu notaţii evidente.

e. Fie $\ell^2(N) = \{x : N \mapsto R \mid \sum_n |x(n)|^2 < \infty\}$. Generalizarea distanţei euclidiene la cazul infinit dimensional (pe $\ell^2(N)$) este

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_n |x(n) - y(n)|^2}.$$

f. Fie $A \neq \emptyset$ şi fie $\mathcal{M}(A) = \{f : A \mapsto R \mid f$ mărginită$\}$. Distanţa "supremum" pe spaţiul funcţiilor mărginite este

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|.$$

g. Fie $a, b \in R$ şi fie $\mathcal{C}[a,b] = \{f : [a,b] \mapsto R \mid f$ continuă$\}$. Distanţa uzuală pe spaţiul funcţiilor continue este

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

h. Mai general, dacă X este un spaţiu metric compact, atunci mulţimea funcţiilor continue $\mathcal{C}(X) = \{f : X \mapsto R \mid f$ continuă$\}$ este spaţiu metric cu distanţa $d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$.

i. Fie $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ codul (alfabetul) binar. Pe produsul cartezian

$$\mathcal{B}^n = \{(x_1, x_2, ...x_n) \mid x_j \in \mathcal{B},\ \forall\, j = 1, 2, ..., n\}$$

definim distanţa Hamming:

$$d((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|.$$

Distanţa Hamming măsoară de fapt numărul de necoincidenţe dintre elementele $(x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $(y_1, y_2, ..., y_n)$.

j. Orice mulţime nevidă A se poate organiza ca spaţiu metric (discret) cu distanţa "discretă" $\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \neq y \\ 0 & \text{dacă } x = y \end{cases}$

Spaţii normate

Fie X un spaţiu vectorial complex (sau real).
O aplicaţie $\| \|: X \longrightarrow [0\,, \infty)$ cu proprietăţile:
a. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$
b. $\| \alpha x \| = |\alpha| \ \| x \|$
c. $\| x \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
pentru orice $x\,, y \in X$ şi $\alpha \in C$, se numeşte normă. O aplicaţie care verifică

doar condiţiile **a** şi **b** se numeşte seminormă.
Perechea $(X\,,\|\,\|)$ se numeşte spaţiu normat. Orice spaţiu normat este şi spaţiu metric, distanţa dintre x şi y fiind, prin definiţie,

$$d(x,y) =\| x-y \|$$

Dacă în plus orice şir Cauchy este convergent, atunci $(X\,,\|\,\|)$ se numeşte spaţiu Banach (sau spaţiu normat complet). Se poate demonstra că operaţiile algebrice sunt continue: dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$ şi analog pentru înmulţirea cu scalari.
Exemple de spaţii normate

i. Spaţiile vectoriale R^n şi C^n sunt spaţii Banach cu norma euclidiană:

$$\| x \|_2= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}.$$

ii. Spaţiile de şiruri $\ell^p(Z)$ şi $\ell^p(N)$
Fie $p \in R\,,\ p \geq 1$, fixat şi fie

$$\ell^p(Z) = \{x : Z \to C\,;\ \sum_{n\in Z} |x(n)|^p \text{ este convergentă}\}.$$

Facem precizarea că dacă $(a_n)_{n\in Z}$ este un şir de numere complexe indexat după Z, atunci seria $\sum\limits_{n\in Z} a_n$ este convergentă dacă seriile $\sum\limits_{n=-\infty}^{0} a_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sunt amândouă convergente.
Cu operaţiile uzuale cu şiruri, $\ell^p(Z)$ este spaţiu vectorial. Norma este

$$\| x \|_p= \left(\sum_{n\in Z} |x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se demonstrează că $(\ell^p(Z), \|\ \ \|_p)$ este spaţiu Banach.
Analog se definesc spaţiile $\ell^p(N) = \{x : N \to C\,;\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} |x(n)|^p < \infty\}$.

iii. Spaţiul şirurilor mărginite
Fie $\ell^\infty(Z) = \{x : Z \to C\,;\ x \text{ şir mărginit }\}$. Cu operaţiile uzuale, $\ell^\infty(Z)$ este spaţiu vectorial. Aplicaţia $\| x \|_\infty= \sup\limits_{n\in Z} |x(n)|$ este normă, iar $(\ell^\infty(Z), \|\ \ \|_\infty)$ este spaţiu Banach.
Analog se defineşte spaţiul $\ell^\infty(N)$.

iv. Spaţiul funcţiilor continue
Fie $\mathcal{D}$ un spaţiu metric compact (caz particular: $D = [a, b], a, b \in R$) şi fie

$$\mathcal{C}(\mathcal{D}) = \{f : \mathcal{D} \to C\,;\ f \text{ continuă}\}.$$

Cu operaţiile uzuale, $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ este spaţiu vectorial. Structura de spaţiu Banach este definită de norma supremum:

$$\| f \|_\infty = \sup_{t\in\mathcal{D}} |f(t)|.$$

v. Spaţiul funcţiilor mărginite
Fie $A \neq \emptyset$; spaţiul vectorial al funcţiilor mărginite

$$\mathcal{M}(A) = \{f : A \mapsto R \mid f \text{ mărginită }\}$$

este spaţiu Banach cu norma supremum: $\| f \|_\infty = \sup_{t\in A} |f(t)|$.
Serii înt-un spaţiu normat
Fie $(X, \| \|)$ un spaţiu normat şi fie $(x_n)_{n\in N}$ un şir de elemente din X. Spunem că seria $\sum\limits_{n\in N} x_n$ este convergentă la $x \in X$ (numit în acest caz suma seriei) dacă şirul sumelor parţiale, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ converge la x. Seria $\sum\limits_{n\in N} x_n$ se numeşte absolut convergentă dacă seria (de numere reale şi pozitive) $\sum\limits_{n\in N} \| x_n \|$ este convergentă. Cu o demonstraţie asemănătoare celei de la serii de numere reale se poate arăta că într-un spaţiu Banach orice serie absolut convergentă este convergentă, reciproca fiind, în general, falsă.

Operatori liniari
Fie $(X, \| \ \|)$ şi $(Y, \| \ \|)$ două normate; o aplicaţie $T : X \to Y$ se numeşte aplicaţie liniară (sau operator liniar) dacă:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y),\ \forall x, y \in X,\ \forall \alpha, \beta \in C.$$

Operatorul T se numeşte liniar şi continuu dacă, în plus, aplicaţia T este şi continuă.
Mulţimea operatorilor liniari şi continui de la X în Y se notează cu $\mathcal{L}(X, Y)$. Cu operaţiile uzuale:

$$(T + S)(x) = T(x) + S(x),\ (\alpha\, T)(x) = \alpha T(x),\ \forall\, \alpha \in C,\ \forall\, x \in X,$$

mulţimea $\mathcal{L}(X, Y)$ este spaţiu vectorial.

Pentru orice aplicaţie liniară $T : X \mapsto Y$, se demonstrează că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a. T este continuă.
b. T este continuă în $0 \in X$.
c. există $M > 0$ astfel încât: $\forall\, x \in X$, $\| T(x) \| \leq M \| x \|$.

Spaţiul vectorial $\mathcal{L}(X, Y)$ se organizează ca spaţiu normat cu norma:

$$\| T \| = \inf\{M > 0 \mid \| T(x) \| \leq M \| x \|\}.$$

Au loc următoarele egalităţi:

$$\| T \| = \sup\{\| Tx \| \mid \| x \| \leq 1\} = \sup\{\| Tx \| \mid \| x \| = 1\}.$$

Din definiţie rezultă:

$$\| Tx \| \leq \| T \| \| x \| \ \forall T \in \mathcal{L}(X),\ \forall x \in X.$$

Se demonstrează de asemenea inegalitatea:

$$\| TS \| \leq \| T \| \| S \|,\ \forall T, S \in \mathcal{L}(X).$$

Dacă Y este spaţiu Banach, atunci $(\mathcal{L}(X, Y), \| \ \|)$ este spaţiu Banach.
Dacă Y este corpul scalarilor (R sau C) atunci $\mathcal{L}(X, C)$ se notează X' şi se numeşte dualul spaţiului X, iar elementele lui se numesc funcţionale liniare şi continue.
În cazul $X = Y$, notăm $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$.
Spectru, valori proprii, vectori proprii
În continuare presupunem că X este spaţiu Banach.
Pentru orice operatori $T, S \in \mathcal{L}(X)$ se defineşte produsul (compunerea):

$$(TS)(x) = T(S(x)),\ \forall\, x \in X.$$

Un operator $T \in \mathcal{L}(X)$ se numeşte inversabil dacă există $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ astfel încât $TS = I$, unde, am notat cu I operatorul identic: $Ix = x$, $\forall\, x \in X$.
Un rezultat fundamental (teorema lui Banach) afirmă că un operator T este inversabil dacă şi numai dacă este bijectiv.

Pentru orice $T \in \mathcal{L}(X)$, mulţimea:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in C \mid \text{operatorul } \lambda I - T \text{ nu este inversabil}\}$$

se numeşte spectrul operatorului T. Se demonstrează că spectrul este mulţime nevidă şi compactă inclusă în $\{\lambda \in C \mid |\lambda| \leq \| T \|\}$.

Numărul $r(T) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$ se numeşte raza spectrală a operatorului T; evident, $r(T) \leq \| T \|$ şi, în plus, are loc formula razei spectrale:

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \| T^n \|^{\frac{1}{n}} .$$

Submulţimea:

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \mid \text{operatorul } \lambda I - T \text{ nu este injectiv}\}$$

se numeşte spectrul punctual (sau mulţimea valorilor proprii).
Dacă $\lambda \in \sigma_p(T)$, atunci există $x \in X, x \neq 0$, astfel încât $Tx = \lambda x$. În acest caz vectorul x se numeşte vector propriu al lui T asociat valorii proprii λ. Dacă X este un spaţiu Banach finit dimensional, (C^n sau R^n) atunci spectrul coincide cu mulţimea valorilor proprii şi

$$\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{\lambda \in C \mid P_T(\lambda) = 0\},$$

unde, P_T este polinomul caracteristic al operatorului T.

2.2 Spaţii metrice

1. Să se demonstreze că următoarele aplicaţii sunt metrici pe R^2, echivalente cu distanţa euclidiană:
a. $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.
b. $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$.
Soluţie
Se verifică direct definiţia distanţei. Fie d_2 distanţa euclidiană pe R^2 şi fie $(x, y) \in R^2$; din inegalităţile:

$$\sqrt{|x|^2 + |y|^2} \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2\,(|x|^2 + |y|^2)},$$

$$\frac{1}{2}\,(|x| + |y|) \leq \max\{|x|, |y|\} \leq |x| + |y|,$$

rezultă:

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq \sqrt{2}\, d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

şi respectiv

$$\frac{1}{2}\, d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)).$$

2. Să se generalizeze exemplul de mai sus în cazurile R^n şi C^n.

3. Să se caracterizeze şirurile convergente şi şirurile Cauchy într-un spaţiu metric discret. Să se demonstreze că orice spaţiu metric discret este complet.

Soluţie

Fie (X, d) un spaţiu metric discret şi fie x_n un şir în X; fie $0 < \varepsilon < 1$. Dacă $x_n \to a$, atunci există $n_\varepsilon \in N$ astfel încât $d(x_n, a) < \varepsilon < 1, \forall n \geq n_\varepsilon$, deci $d(x_n, a) = 0, \forall n \geq n_\varepsilon$; rezultă că şirul x_n este constant (începând de la un rang). Un raţionament similar se aplică şi în cazul şirurilor Cauchy.

4. Pe mulţimea numerelor raţionale, Q, considerăm distanţa uzuală (indusă din R), $d(x, y) = |x - y|$. Să se demonstreze că spaţiul metric (Q, d) nu este complet.

Soluţie

Fie şirul de numere raţionale $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Se ştie că în R şirul x_n este convergent la $e \in R \setminus Q$. Rezultă că x_n este şir Cauchy în R, deci şi în Q; dacă x_n ar fi convergent în Q, atunci în R ar avea două limite, ceea ce constituie o contradicţie.

5. Mulţimea lui Cantor

Notăm cu I_0 intervalul $[0, 1]$. Eliminăm din I_0 intervalul din mijloc, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ şi notăm

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

mulţimea astfel obţinută. Continuăm procedeul: din fiecare din intervalele $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$ eliminăm intervalul din mijloc şi notăm cu I_2 mulţimea rezultată:

$$I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Continuând procedeul, se obţine un şir de mulţimi $I_0, I_1, I_2, ...$ cu proprietăţile:

i. $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset ...$

ii. I_n este reuniunea a 2^n intervale, fiecare de lungime 3^{-n}.

Prin definiţie, mulţimea lui Cantor este intersecţia: $\mathcal{C} = \bigcap_{n \in N} I_n$.

Să se demonstreze următoarele proprietăţi:

a. $\mathcal{C}$ este mulţime compactă.

b. Mulţimea $\mathcal{C}$ nu conţine intervale.

c. Mulţimea lui Cantor este perfectă (nu conţine puncte izolate); în particular, rezultă că $\mathcal{C}$ nu este mulţime numărabilă.

Soluţie
a. Mulţimea $\mathcal{C}$ este mărginită (inclusă în $[0,1]$) şi închisă (intersecţie de mulţimi închise).
b. Din construcţie, rezultă:

$$\mathcal{C} \cap \left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m} \right) = \emptyset, \, \forall k, m \in N.$$

Dar, orice interval (α, β) conţine un interval de forma $\left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m} \right)$ dacă m este ales cu condiţia $3^{-m} < \frac{\beta - \alpha}{6}$. Rezultă că mulţimea $\mathcal{C}$ nu conţine intervale.
c. Fie $a \in \mathcal{C}$ şi fie S un interval arbitrar care-l conţine pe a; pentru orice $n \in N$, fie J_n acel interval al lui I_n care-l conţine pe a. Alegem n_0 suficient de mare astfel încât $J_{n_0} \subseteq S$; dacă notăm cu x_n acel capăt al intervalului J_n diferit de a, rezultă $x_n \in \mathcal{C} \cap S, \; x_n \neq a, \forall n \geq n_0$.

6. Fie spaţiul metric (R^n, d_2), fie $x_m = (x_1^m, x_2^m, ..., x_n^m)$ un şir de elemente din R^n şi $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n$. Atunci:

$$\lim_{m \to \infty} x_m = a \text{ (în } R^n) \; \Leftrightarrow \; \lim_{m \to \infty} x_k^m = a_k \text{ (în } R), \forall k \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Soluţie
Se aplică inegalităţile:

$$|x_j^m - a_j| \leq d_2(x_m, a) \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k^m - a_k|, \forall j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

7. Fie $a, b \in R, a < b$.
a. Să se demonstreze că

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

este distanţă pe mulţimea funcţiilor continue $\mathcal{C}[a, b]$.
b. Să se demonstreze că orice şir $f_n \in \mathcal{C}([a, b])$ convergent în raport cu distanţa d_∞ este convergent şi în raport cu distanţa d_1, dar reciproca este falsă.
Soluţie
a. Se verifică direct definiţia (se folosesc proprietăţile modulului şi ale integralei).
b. Fie $f_n, f \in \mathcal{C}([a, b])$ astfel încât $d_\infty(f_n, f) \to 0$. Atunci:

$$d_1(f_n, f) = \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b - a) \cdot d_\infty(f_n, f) \to 0.$$

Pentru a arăta că reciproca este falsă, fie şirul $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$.
Atunci $f_n \to 0$ în raport cu distanţa d_1, dar nu converge în raport cu d_∞.

8. Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi fie $A \subseteq X$; să se demonstreze că spaţiul metric indus (A, d) este complet dacă şi numai dacă A este submulţime închisă în X.
Soluţie
Se foloseşte caracterizarea cu şiruri a mulţimilor închise. Presupunem mai întâi că A este închisă. Dacă $x_n \in A$ este un şir Cauchy (în X), atunci există (deoarece X este complet) $x \in X$ astfel încât $x_n \to x$. Dar A este închisă, deci $x \in A$. Implicaţia inversă o lăsăm ca exerciţiu.

9. a. Să se demonstreze că aplicaţia

$$d : R \times R \mapsto [0, \infty), d(x, y) = |\text{arctg}x - \text{arctg}y|, \forall x, y \in R,$$

este distanţă pe R.
b. Spaţiul metric (R, d) nu este complet.
Soluţie
a. Funcţia arctg este injectivă, deci $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
b. Şirul $x_n = n$ este şir Cauchy în raport cu distanţa d:

$$d(x_n, x_m) = |\text{arctg}\, n - \text{arctg}\, m| = \left|\text{arctg}\left(\frac{n-m}{1+nm}\right)\right| \to 0,$$

dacă $m, n \to \infty$.
Presupunând, prin absurd, că şirul x_n este convergent la $a \in R$, atunci $d(x_n, a) \to 0$; pe de altă parte:

$$d(x_n, a) = |\text{arctg}\, n - \text{arctg}\, a| =$$

$$= \left|\text{arctg}\left(\frac{n-a}{1+na}\right)\right| \to \left|\text{arctg}\left(\frac{1}{a}\right)\right| \neq 0, \forall a \in R,$$

contradicţie.

10. Exemplul de mai sus se poate generaliza astfel: fie X o mulţime nevidă arbitrară, fie $f : X \mapsto R$ şi fie

$$d : X \times X \mapsto [0, \infty),\ d(x, y) = |\, f(x) - f(y)\,|.$$

Atunci d este distanţă pe X dacă şi numai dacă funcţia f este injectivă.

11. In spaţiul metric (R^2, d_2) considerăm submulţimile:
$A = \{(x,y) \in R^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$,
$B = \{(x,y) \in R^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$,
$D = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$,
$E = \{(x,y) \in R^2 \mid ax + by + c = 0, a, b, c \in R \text{ constante fixate}\}$,
$F = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right) \in R^2 \mid n \in N\right\}$, $G = F \cup \{(0,1)\}$.

Să se precizeze dacă mulţimile sunt deschise, închise, mărginite, conexe sau compacte.

Soluţie

A este mulţime mărginită şi conexă, dar nu este deschisă şi nici închisă. B este compactă şi conexă. D este deschisă, conexă şi mărginită. E este închisă, conexă şi nemărginită. F este mărginită, dar nu este deschisă, nici închisă şi nici conexă. G este mulţime compactă.

12. Să se dea un exemplu de submulţime în R^2 care este conexă, dar nu este conexă prin arce (o submulţime M a unui spaţiu metric X se numeşte conexă prin arce dacă pentru orice $x, y \in M$ există $a, b \in R$ şi o funcţie continuă $\gamma : [a,b] \mapsto M$ astfel încât $\gamma(a) = x$ şi $\gamma(b) = y$).

Soluţie

Un exemplu este :

$$H = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \in R^2 \mid x \in (0,1]\right\} \bigcup \{(0,y) \in R^2 \mid y \in [-1,1]\}.$$

13. Să se arate că într-un spaţiu metric intersecţia unei familii infinite de mulţimi deschise nu este neapărat deschisă şi reuniunea unei familii infinite de mulţimi închise nu este neapărat închisă.

Soluţie

Fie, de exemplu, în spaţiul metric R mulţimile deschise

$$D_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \forall n \in N^\star.$$

Atunci $\bigcap\limits_{n \geq 1} D_n = \{0\}$. În acelaşi spaţiu metric, fie mulţimile închise

$$F_n = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right], \forall n \in N^\star.$$

Atunci $\bigcup\limits_{n \geq 1} F_n = (0,1)$.

2.3 Teorema contracţiei

14. Să se decidă dacă următoarele funcţii sunt contracţii pe mulţimile indicate:
a. $f(x) = \sin x$, $x \in R$.
b. $f(x) = \ln x$, $x \in [e, \infty)$.
c. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in R$.
d. $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{5(1 + x^2)}$, $x \in R$.
e. $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$, $x \in R$.
Soluţii
a. Funcţia $f(x) = \sin x$ nu este contracţie pe R. Presupunând prin absurd că ar exista $k \in (0, 1)$ astfel încât $|\sin x - \sin y| \leq k\,|x - y|$, $\forall x, y \in R$, atunci, în particular pentru $y = 0$, se obţine $|\sin x| \leq k\,|x|$, $\forall x \in R$; rezultă că $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|\sin x|}{|x|} \leq k < 1$, contradicţie. Funcţia sinus este totuşi contracţie pe orice interval închis care nu conţine numere de forma $k\pi, \forall k \in Z$ (pentru demonstraţie se poate aplica teorema lui Lagrange).
b. Funcţia $f(x) = \ln x$ este contracţie pe $[e, \infty)$; din teorema lui Lagrange rezultă:

$$|\ln x - \ln y| \leq \left(\sup_{c \geq e} \frac{1}{c} \right) |x - y| \leq \frac{1}{e}\,|x - y|, \forall x, y \in R.$$

c. Funcţia $f(x) = \operatorname{arctg} x$ nu este contracţie pe R; fie, prin absurd, $k \in (0, 1)$ astfel încât $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq k\,|x - y|$, $\forall\, x, y \in R$. În particular pentru $y = 0$ rezultă $|\operatorname{arctg} x| \leq k\,|x|, \forall\, x \in R$ şi deci $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|\operatorname{arctg} x|}{|x|} \leq k < 1$, contradicţie. Funcţia $f(x) = \operatorname{arctg} x$ este contracţie pe orice interval I pentru care 0 nu este punct de acumulare, deoarece, pe un astfel de interval are loc inegalitatea $\sup\limits_{x \in I} |f'(x)| < 1$.
d. Funcţia nu este contracţie pe R; raţionament similar cu exemplele a şi c de mai sus.
e. Funcţia este contracţie pe R.

15. Să se aproximeze cu o eroare mai mică decât 10^{-3} soluţia reală a ecuaţiei $x^3 + 4x - 1 = 0$.
Soluţie
Ecuaţia are o singură soluţie reală, $\xi \in (0, 1)$. Vom aplica metoda aproximaţiilor succesive. Fie $X = [0, 1]$ şi $f : X \mapsto X$, $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$. Ecuaţia

este echivalentă cu $f(x) = x$, iar spaţiul metric X este complet (cu metrica uzuală indusă din R); demonstrăm acum că f este contracţie pe X. Derivata este $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)^2}$, iar $\sup_{x\in X} |f'(x)| = -f'(1) = \frac{2}{25} < 1$, deci f este contracţie cu factorul factorul de contracţie $k = \frac{2}{25}$. Şirul aproximaţiilor succesive este

$$x_0 = 0, x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{x_n^2 + 4};$$

evaluarea erorii:

$$|x_n - \xi| < \frac{k^n}{1-k}|x_0 - x_1| = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{25}\right)^n,$$

deci $\xi \approx x_3 = f\left(\frac{16}{65}\right) = 0,2355072$.
Aceeaşi ecuaţie se poate rezolva aproximativ şi folosind contracţia $g(x) = \frac{1}{4}(1 - x^3), x \in [0, 1]$. În acest caz factorul de contracţie este $k = \sup_{x\in(0,1)} |g'(x)| = \frac{3}{4}$. Metoda aproximaţiilor succesive converge mult mai încet în acest caz, $\xi \approx x_6$.

16. Să se calculeze cu o eroare mai mică decât 10^{-3} soluţia reală a ecuaţiei $x^3 + 12x - 1 = 0$.
Soluţie
Ecuaţia are o singură soluţie reală $\xi \in (0, 1)$ şi este echivalentă cu $x = f(x)$, unde $f(x) = \left(x^2 + 12\right)^{-1}$ este contracţie pe $[0, 1]$, cu factorul de contracţie $k = \frac{2}{169}$.

17. Să se calculeze cu o eroare mai mică decât 10^{-3} soluţia reală a ecuaţiei $x^5 + x - 15 = 0$.
Soluţie
Ecuaţia are o singură soluţie reală $\xi \in (1, 2)$. Scriem ecuaţia sub forma echivalentă $x = \sqrt[5]{15 - x}$; aplicaţia $f(x) = \sqrt[5]{15 - x}$ este contracţie pe $[1, 2]$ cu factorul de contracţie $k = \frac{1}{5\sqrt[5]{14^4}}$.

18. Fie $a \in (0, 10^{-1})$. Să se construiască un şir al aproximaţiilor succesive pentru soluţia din $(0, 1)$ a ecuaţiei $xe^x = a$.
Soluţie
Scriem ecuaţia sub forma $x = \phi(x)$, cu $\phi(x) = ae^{-x}$. Atunci $\phi : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ este o contracţie (cu factorul a).

19. Ecuaţia lui Kepler Să se construiască un şir care converge la (unica) soluţie a ecuaţiei $x = q \sin x + m, q \in (-1, 1), m \in R$.

Soluţie
Funcţia $f : R \mapsto R$, $f(x) = q \sin x + m$ este contracţie:

$$\sup_{x \in R} |f'(x)| = q < 1,$$

deci ecuaţia $x = f(x)$ are o soluţie unică $\xi \in R$.
Pentru orice $x_0 \in R$, şirul

$$x_{n+1} = f(x_n) = q \sin x_n + m$$

converge la ξ, eroarea la pasul n fiind:

$$|x_n - \xi| < \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|.$$

20. Fie $a, b, c \in R$; în ce condiţii se poate aplica metoda aproximaţiilor succesive ecuaţiei: $x = a \sin x + b \cos x + c$?
Soluţie
Fie $f : R \mapsto R$, $f(x) = a \sin x + b \cos x + c$. Funcţia f se poate scrie sub forma:

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) + c =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \phi) + c,$$

cu $\phi \in R$ bine ales. Rezultă că aplicaţia f este contracţie dacă şi numai dacă $\sqrt{a^2 + b^2} < 1$; dacă această ipoteză este adevărată, atunci un şir al aproximaţiilor succesive este (de exemplu) $x_0 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Eroarea la pasul n este cel mult $\dfrac{\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^n}{1 - \sqrt{a^2 + b^2}} |b + c|$.

21. Să se demonstreze că pentru orice $a \in (-1, 1)$ şi pentru orice funcţie continuă $h : [0, 1] \mapsto R$ există o singură funcţie continuă $u : [0, 1] \mapsto R$ astfel încât $u(x) = h(x) + a \sin u(x)$, $\forall x \in [0, 1]$.
Soluţie
Studiem ecuaţia în spaţiul metric $(\mathcal{C}([0, 1]), d_\infty)$. Fie aplicaţia

$$F : \mathcal{C}([0, 1]) \mapsto \mathcal{C}([0, 1]),\ (F(f))(x) = h(x) + a \sin f(x), \forall x \in [0, 1].$$

Este suficient să demonstrăm că F este contracţie (funcţia u din concluzie este punctul fix al contracţiei). Fie $f, g \in \mathcal{C}([0, 1])$; atunci:

$$d_\infty(F(f), F(g)) = \sup_{x \in [0,1]} |a(\sin f(x) - \sin g(x))| \leq |a| \cdot d_\infty(f, g),$$

deci F este contracţie cu factorul $|a|$.

22. Sisteme liniare Fie $A = (a_{ij})$ o matrice pătratică de ordinul $n \in N$ cu elemente $a_{ij} \in R$, $\forall i, j \in \{1, 2, .., n\}$ şi fie $b_i \in R$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Pentru ce valori ale parametrului $\lambda \in R$ se poate aplica metoda aproximaţiilor succesive sistemului liniar: $x_i = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + b_i$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$?

Soluţie

Fie d una din distanţele echivalente pe R^n (a se vedea exerciţiile 1 şi 2) şi fie

$$T : R^n \mapsto R^n, T(x_1, x_2, .., x_n) = \lambda \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k + b_1, ..., \sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_k + b_n \right).$$

Se impune condiţia ca T să fie contracţie şi se obţin valorile cerute pentru λ. Vom face în continuare calculul pentru distanţa euclidiană, $d = d_2$. Pentru orice vectori $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ din R^n, avem (aplicăm inegalitatea lui Schwarz):

$$d_2(T(x), T(y)) = |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_k - y_k) \right)^2} \leq$$

$$\leq |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right) \right)} = |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2} \cdot d_2(x, y).$$

Deci T este contracţie dacă şi numai dacă $|\lambda| \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2} \right)^{-1}$.

23. Să se rezolve exerciţiul anterior în raport cu distanţele d_1 şi d_∞.

24. Ecuaţii integrale de tip Fredholm Fie $a, b \in R$, $a < b$ şi fie $K : [a, b] \times [a, b] \mapsto R$ o funcţie continuă (numită nucleu). Pentru orice funcţie continuă $f : [a, b] \mapsto R$ şi pentru orice $\lambda \in R$, fie ecuaţia (cu necunoscuta ϕ):

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\phi(y)dy + f(x), \forall x \in [a, b].$$

Să se afle pentru ce valori ale lui $\lambda \in R$ se poate aplica metoda aproximaţiilor succesive ecuaţiei considerate.

Soluţie
Studiem ecuaţia în spaţiul Banach $(\mathcal{C}([a,b]), d_\infty)$. Fie aplicaţia

$$U : \mathcal{C}([a,b]) \mapsto \mathcal{C}([a,b]), (U\phi)(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy + f(x).$$

Ecuaţia Fredholm se scrie $U(\phi) = \phi$. Pentru orice $\phi, \psi \in \mathcal{C}([a,b])$, calculăm:

$$d_\infty(U\phi, U\psi) = \sup_{x\in[a,b]} |(U\phi)(x) - (U\psi)(x)| =$$

$$= \sup_{x\in[a,b]} |\lambda \int_a^b K(x,y)(\phi(y) - \psi(y))dy| \leq$$

$$\leq |\lambda| \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b |K(x,y)| \cdot |\phi(y) - \psi(y)|dy \leq$$

$$\leq |\lambda| \parallel K \parallel_\infty \int_a^b |\phi(y) - \psi(y)|dy,$$

unde, am notat $\parallel K \parallel_\infty = \sup_{(x,y)\in[a,b]^2} |K(x,y)|$. Rezultă deci

$$d_\infty(U\phi, U\psi) \leq |\lambda| \parallel K \parallel_\infty (b-a) d_\infty(\phi, \psi), \forall \phi, \psi \in \mathcal{C}([a,b]).$$

Aplicaţia U este contracţie dacă şi numai dacă $|\lambda| < \dfrac{1}{(b-a) \parallel K \parallel_\infty}$. În această ipoteză, construim un şir al aproximaţiilor succesive: fie $\phi_0 \in \mathcal{C}([a,b])$ şi $\phi_{n+1} = U\phi_n$. Calculăm primii termeni ai şirului:

$$\phi_1(x) = (U\phi_0)(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)\phi_0(y)dy + f(x), \forall x \in [a,b].$$

$$\phi_2(x) = (U\phi_1)(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) \left(\lambda \int_a^b K(y,t)\phi_0(t)dt + f(y) \right) dy + f(x) =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x,y)K(y,t)\phi_0(t)dtdy =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy + \lambda^2 \int_a^b \left(\phi_0(t) \int_a^b K(x,y)K(y,t)dy \right) dt.$$

Definim nucleele iterate:

$$K_1(x,y) = K(x,y),$$

$$K_2(x,y) = \int_a^b K(x,t)K_1(t,y)dt,$$

$$K_3(x,y) = \int_a^b K(x,t)K_2(t,y)dt,$$

.....

$$K_n(x,y) = \int_a^b K(x,t)K_{n-1}(t,y)dt.$$

Cu aceste notaţii, soluţia ecuaţiei Fredholm este:

$$\xi(x) = f(x) + \sum_{n\geq 1} \lambda^n \int_a^b K_n(x,y)f(y)dy,\ \forall x \in [a,b].$$

Fie $R(x,y,\lambda) = \sum_{n\geq 0} \lambda^n K_{n+1}(x,y)$ rezolventa ecuaţiei; atunci:

$$\xi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,y,\lambda)f(y)dy.$$

25. Să se determine $\lambda \in R$ astfel încât ecuaţiei

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 xy\phi(y)dy + x^2$$

să i se poată aplica metoda aproximaţiilor succesive şi, în acest caz, să se rezolve ecuaţia.

Soluţie

Cu notaţiile din exerciţiul precedent, $a = 0$, $b = 1$,
$K : [0,1] \times [0,1] \mapsto R$, $K(x,y) = xy$, $f(x) = x^2$ şi $\| K \|_\infty = 1$. Aplicaţia U definită prin $(U\phi)(x) = \lambda \int_0^1 xy\phi(y)dy + x^2$ este contracţie dacă şi numai dacă $|\lambda| < 1$. În acest caz, nucleele iterate sunt:

$$K_1(x,y) = K(x,y) = xy,$$

$$K_2(x,y) = \int_0^1 K(x,t)K_1(t,y)dt = \int_0^1 xt^2ydt = \frac{1}{3}xy,$$

$$K_3(x,y) = \int_0^1 \frac{1}{3}xt^2ydt = \frac{1}{3^2}xy.$$

În general, $K_n = \frac{1}{3^{n-1}}xy$. Rezultă:

$$R(x,y,\lambda) = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^n xy = \frac{3xy}{3-\lambda},$$

şi deci soluţia (unică) a ecuaţiei este

$$\xi(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 \frac{3xy}{3-\lambda} y^2 dy = x^2 + \frac{3\lambda}{4(3-\lambda)} x.$$

26. Metoda lui Newton
Fie $a, b \in R$ şi fie $f : [a, b] \mapsto R$ o funcţie de două ori derivabilă astfel încât $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$. Presupunem că ecuaţia $f(x) = 0$ are o soluţie $\xi \in [a, b]$. Metoda lui Newton aproximează ξ cu şirul aproximaţiilor succesive generat de contracţia $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Să se găsească o condiţie suficientă pentru a se putea aplica metoda aproximaţiilor succesive şi să se interpreteze geometric metoda.
Soluţie
Condiţia $|g'(x)| \leq k < 1$ (pentru ca g să fie contracţie) este echivalentă cu $|f(x)f''(x)| < k(f'(x))^2, \forall x \in [a, b]$. Dacă această condiţie este îndeplinită, atunci şirul aproximaţiilor succesive este $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$. Geometric, x_n este abscisa punctului de intersecţie al tangentei la graficul funcţiei f în punctul $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ cu axa Ox. Într-adevăr, ecuaţia tangentei este $y - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1})$ şi pentru $y = 0$ se obţine x_n.

27. Fie $a > 0$ şi $p \in N$. Să se aplice metoda lui Newton pentru a construi un şir al aproximaţiilor succesive pentru $\sqrt[p]{a}$.
Soluţie
Fie $f(x) = x^p - a$ şi $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{p}\left((p-1)x + ax^{1-p}\right)$. Aplicaţia g este contracţie pe un interval care conţine $\sqrt[p]{a}$:

$$|g'(x)| = \frac{p-1}{p} \mid 1 - ax^{-p} \mid < \frac{p-1}{p} < 1 \,, \forall x > \sqrt[p]{\frac{a}{2}}.$$

In concluzie, pentru a construi un şir al aproximaţiilor succesive, trebuie ca primul termen, x_0, să fie ales astfel încât $x_0 > \sqrt[p]{\frac{a}{2}}$.

2.4 Funcţii continue

28. Să se studieze continuitatea in zero funcţiei

$$f(x) = \begin{cases} x[\frac{1}{x}], & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

unde, $[a]$ este partea întreagă a numărului $a \in R$.
Soluţie
Din dubla inegalitate:

$$x\left(\frac{1}{x}-1\right) < f(x) \leq x\frac{1}{x}, \forall\, x \in (0,1],$$

rezultă că funcţia f este continuă în 0.

29. Fie

$$f : R \mapsto R, f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Să se demonstreze că f este uniform continuă pe R.
Soluţie
Funcţia f este continuă, deci pe orice interval compact $[a,b] \subset R$ este şi uniform continuă. Fie $x_n \to \infty$ şi $y_n \to \infty$ astfel încât $|x_n - y_n| \to 0$. Atunci $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$ (deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = 1$), deci f este uniform continuă pe R.

30. Fie $f : (0,1] \mapsto R, f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$. Să se demonstreze că f nu este uniform continuă.
Soluţie
Fie $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ şi $y_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Atunci $|x_n - y_n| \to 0$, dar

$$|f(x_n) - f(y_n)| \to 1 \neq 0.$$

31. Fie $f : (0,1] \mapsto R, f(x) = \ln x$ şi $g : [1,\infty) \mapsto R, g(x) = \ln x$. Să se studieze uniform continuitatea funcţiilor f şi g.
Soluţie
Funcţia f nu este uniform continuă: fie $x_n = e^{-n}$ şi $y_n = e^{-2n}$. Atunci $|x_n - y_n| \to 0$, dar $|f(x_n) - f(y_n)| \to \infty$. Funcţia g este uniform continuă: din inegalitatea $\sup\limits_{x\geq 1} |g'(x)| \leq 1$, rezultă, (aplicând teorema lui Lagrange):

$$|g(x) - g(y) \leq |x - y|, \forall x, y \in [1,\infty).$$

32. Fie (X,d) un spaţiu metric, fie $f : X \mapsto R$ o aplicaţie continuă şi fie $a \in R$. Considerăm mulţimile:

$$A = \{x \in X \mid f(x) < a\}$$

$$B = \{x \in X \,|f(x) \leq a\}$$

$$D = \{x \in X \mid f(x) = a\}.$$

Să se demonstreze că A este mulţime deschisă, iar B şi D sunt mulţimi închise.

Soluţie

$A = f^{-1}((-\infty, a)),\ B = f^{-1}((-\infty, a]),\ D = f^{-1}(\{a\})$; mulţimea $(-\infty, a)$ este deschisă, iar mulţimile $(-\infty, a]$ şi $\{a\}$ sunt închise.

33. Să se construiască o funcţie continuă, bijectivă având inversa discontinuă.

Soluţie

Fie $X = [0, 2\pi)$ cu distanţa uzuală indusă din R. Fie cercul unitate

$$Y = \{(x, y) \in R^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\},$$

cu distanţa euclidiană indusă din R^2 (se poate lua şi metrica "lungimea arcului", care este echivalentă cu distanţa euclidiană). Fie funcţia:

$$f : X \mapsto Y,\ f(t) = (\cos t, \sin t).$$

Atunci f este continuă (deoarece componentele sunt continue) şi bijectivă. Dacă funcţia inversă $f^{-1} : Y \mapsto X$ ar fi continuă, atunci imaginea oricărui şir convergent din Y ar fi un şir convergent în X. Şirul $\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}, -\frac{1}{n}\right)$ converge la $(1, 0)$ în Y, dar imaginea sa prin funcţia f^{-1}:

$$f^{-1}\left(\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}, -\frac{1}{n}\right)\right) = 2\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}\right)$$

nu este şir convergent în X; altfel ar trebui ca $2\pi \in X$, contradicţie.

34. Există funcţii continue şi bijective de la $[0, 1)$ în $(0, 1)$?

Soluţie

Fie $X = [0, 1)$ cu metrica indusă din R şi $Y = (0, 1)$ cu aceeaşi metrică. Să presupunem, prin absurd, că ar exista o funcţie continuă şi bijectivă $f : X \mapsto Y$. Fie $a = f(0)$ şi fie g restricţia lui f la $(0, 1)$; atunci $g((0, 1)) = (0, a) \cup (a, 1)$. Dar $(0, 1)$ este mulţime conexă în X, restricţia g este continuă, deci ar trebui ca $g((0, 1))$ să fie mulţime conexă în Y, contradicţie.

Să se studieze continuitatea următoarelor funcţii în origine (exerciţiile 35-47):

35. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Soluţie

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$, deoarece $|\frac{x^2y}{x^2+y^2}|\leq|x|$. Rezultă că funcţia este continuă.

36. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Soluţie

Trecând la coordonate polare, $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, obţinem:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\rho^2}=\sin\varphi\cdot\cos\varphi,$$

ceea ce arată că limita în $(0,0)$ nu există, deci funcţia nu este continuă în origine.

37. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Soluţie

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ nu există: fie $(x_n,y_n)=(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2})\to(0,0)$. Atunci $f(x_n,y_n)\to\frac{1}{2}$. Dacă $(x'_n,y'_n)=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\to(0,0)$, atunci $f(x'_n,y'_n)\to0$. Se observă că deşi $\lim\limits_{x\to0}f(x,mx)=0,\forall m\in R$, totuşi limita nu există.

38. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Soluţie

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nu există.

39. $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Soluţie

Din inegalitatea $\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}\right|\leq x^2+y^2$ rezultă

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0,$$

deci funcţia este continuă.

40. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{ye^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2+e^{-\frac{2}{x^2}}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Soluţie

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nu există; dacă $(x_n,y_n)=(\frac{1}{\sqrt{\ln n}},\frac{1}{n})\to(0,0)$, atunci

$$f(x_n,y_n)\to\frac{1}{2},$$

iar dacă $(x'_n,y'_n)=(\frac{1}{\sqrt{\ln n}},\frac{1}{n^2})\to(0,0)$, atunci

$$f(x'_n,y'_n)\to 0.$$

41. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{xy}\sin\frac{x^3y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Soluţie

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin\frac{x^3y^2}{x^2+y^2}}{\frac{x^3y^2}{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2}=0$, deoarece

$$\left|\frac{x^3y^2}{x^2+y^2}\right|\leq|x^3|,$$

deci funcţia este continuă.

42. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Soluţie

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=2$, deci funcţia nu este continuă.

43. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2\cdot y^2+1}-1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Soluţie

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}=$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2y^2+1}+1)}=0,$$

deci funcţia este continuă.

44. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Soluţie

Folosind limita $\lim\limits_{t\to 0_+}\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^n}=0,\forall n\in N$, rezultă $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$, deci funcţia este continuă.

45. $f(x,y)=\begin{cases}(1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Soluţie

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left((1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}}\right)^{-\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}=1,$$

deci funcţia nu este continuă.

46. $f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0, & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$

Soluţie

Folosind coordonatele sferice:

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi, y=\rho\sin\theta\sin\varphi, z=\rho\cos\theta,$$

obţinem

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}f(x,y,z)=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2(\sin^2\theta\cos^2\varphi)}{\rho^2}=\sin^2\theta\cos^2\varphi,$$

deci limita nu există.

47. $f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y,z)\notin Oz\\ 0, & x=y=0\end{cases}$

Soluţie

Fie $(0,0,z_o)\in Oz$; analizăm mai întâi cazul $z_o\neq 0$.
Folosind coordonate cilindrice,

$$x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi, z=z,$$

obţinem

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,z_o)} f(x,y,z) = \lim_{(\rho,z)\to(0,z_o)} \frac{\rho\cos\varphi\cdot z}{\rho} = z_o\cos\varphi,$$

deci limita nu există.
Dacă $z_o = 0$, din inegalitatea

$$|f(x,y,z)| \le |z|,$$

rezultă

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0,$$

deci funcţia este continuă în origine.

2.5 Spaţii normate şi operatori liniari

48. a. Fie $x_0 \in [a,b]$; pe spaţiul funcţiilor continue, $(\mathcal{C}[a,b], \| \quad \|_\infty)$ considerăm aplicaţia (numită evaluarea în punctul x_0):

$$F_{x_0} : \mathcal{C}[a,b] \mapsto R,\ F_{x_0}(f) = f(x_0).$$

Să se demonstreze că F_{x_0} este funcţională liniară şi continuă şi să se calculeze norma $\| F_{x_0} \|$.
b. Mai general, să se demonstreze că pentru orice $t_1, t_2, ..., t_n \in [a,b]$ şi orice $c_1, c_2, ..., c_n \in R$, aplicaţia:

$$F : \mathcal{C}[a,b] \mapsto R,\ F(f) = \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k)$$

este funcţională liniară şi continuă. În plus:

$$\| F \| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

Soluţie
a. Fie $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$ şi $\alpha, \beta \in R$; atunci:

$$F_{x_0}(\alpha f + \beta g) = \alpha f(x_0) + \beta g(x_0) = \alpha F_{x_0}(f) + \beta F_{x_0}(g),$$

deci F_{x_0} este funcţională liniară.
Pentru orice $f \in \mathcal{C}[a,b]$, avem:

$$|F_{x_0}(f)| = |f(x_0)| \le \| f \|_\infty,$$

deci F_{x_0} este continuă şi $\| F_{x_0} \| \leq 1$.
Dacă $\mathbf{1}$ este funcţia constantă 1, atunci $|F_{x_0}(\mathbf{1})| = 1$, deci $\| F_{x_0} \| = 1$.
b. Evident, se poate presupune că $c_k \neq 0$, $\forall\, k \in \{1, 2, ..., n\}$ şi că punctele $t_1, t_2, ..., t_n$ sunt alese crescător; liniaritatea:

$$F(\alpha f + \beta g) = \sum_{k=1}^{n} c_k \alpha f(t_k) + \sum_{k=1}^{n} c_k \beta g(t_k) =$$

$$= \alpha F(f) + \beta F(g)\ \forall\, f, g \in \mathcal{C}[a, b],\ \forall \alpha, \beta \in R.$$

Din inegalitatea:

$$|F(f)| = \left| \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |c_k\, f(t_k)| \ \leq \ \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k| \right) \ \| \ f \ \|_\infty,\ \forall\, f \in \mathcal{C}[a, b],$$

rezultă continuitatea lui F şi inegalitatea:

$$\| \ F \ \| \leq \ \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

Pentru a demonstra inegalitatea inversă, considerăm funcţia $h : [a, b] \mapsto R$, definită astfel: în punctele t_k ia valorile $\operatorname{sgn}(c_k)$, pe fiecare interval (t_k, t_{k+1}) funcţia este liniară, iar pe intervalele $[a, t_1)$ şi $(t_n, b]$ funcţia h este constantă. Notând $u_k = \frac{c_k}{|c_k|}$, funcţia h este:

$$h(x) = \begin{cases} u_k & , \quad x = t_k \\ u_1 & , \quad x \in [a, t_1) \\ u_n & , \quad x \in (t_n, b] \\ \frac{u_{k+1} - u_k}{t_{k+1} - t_k}\, x + \frac{u_k t_{k+1} - u_{k+1} t_k}{t_{k+1} - t_k} & , \quad x \in (t_k, t_{k+1}) \end{cases}$$

Evident, din definiţie rezultă funcţia h este continuă şi $\| \ h \ \|_\infty = 1$, deci:

$$\| \ F \ \| \geq \ |F(h)| = \left| \sum_{k=1}^{n} c_k h(t_k) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \, \frac{c_k}{|c_k|} \right| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|,$$

ceea ce încheie demonstraţia.

49. a. Pe spaţiul Banach $(\mathcal{C}[a, b], \| \ \|_\infty)$ al funcţiilor continue (reale) considerăm aplicaţia

$$J : \mathcal{C}[a, b] \mapsto R,\ J(f) = \int_a^b f(t) dt.$$

Să se demonstreze că J este funcţională liniară şi continuă şi apoi să se calculeze norma sa.

b. Mai general, pentru orice funcţie continuă $\varphi : [a,b] \mapsto R$ aplicaţia:

$$J_\varphi : \mathcal{C}[a,b] \mapsto R,\ J_\varphi(f) = \int_a^b \varphi(t)\, f(t)\, dt$$

este o funcţională liniară şi continuă si

$$\| J_\varphi \| = \int_a^b |\varphi(t)|\, dt.$$

Soluţie

a. Liniaritatea este o consecinţă directă a proprietăţilor integralei Riemann. Pentru orice $f \in \mathcal{C}[a,b]$, avem:

$$|J(f)| = \left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f(t)| dt \leq (b-a) \cdot \| f \|_\infty,$$

deci J este continuă. Din inegalitatea de mai sus rezultă şi $\| J \| \leq b-a$. Pentru a demonstra inegalitatea inversă, fie $\mathbf{1}(t) = 1, \forall t \in [0,1]$. Atunci $\| \mathbf{1} \|_\infty = 1$ şi deci:

$$\| J \| \geq |J(\mathbf{1})| = b-a.$$

Rezultă $\| J \| = b-a$.

b. Liniaritatea este evidentă; din inegalitatea:

$$|J_\varphi(f)| = \left| \int_a^b \varphi(t) f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t) f(t)|\, dt \leq \| f \|_\infty \int_a^b |\varphi(t)|\, dt$$

rezultă continuitatea şi inegalitatea:

$$\| J_\varphi \| \leq \int_a^b |\varphi(t)|\, dt.$$

Pentru a demonstra inegalitatea inversă construim o funcţie $g \in \mathcal{C}[a,b]$ după cum urmează; fie $\varepsilon > 0$, arbitrar fixat şi fie o diviziune a intervalului $[a,b]$,

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b,$$

astfel încât

$$\max_{k=1}^{n} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| < \varepsilon.$$

Această alegere a diviziunii este posibilă datorită continuităţii funcţiei φ. Împărţim intervalele diviziunii în două grupe:
în prima grupă considerăm intervalele (notate $\Delta'_1,\ \Delta'_2, ..., \Delta'_r$) pe care funcţia φ nu se anulează (nu schimbă semnul);
în grupa a doua, celelalte intervale (notate $\Delta''_1,\ \Delta''_2, ..., \Delta''_s$).
Definim funcţia g pe fiecare interval al diviziunii urmând următoarele reguli:
i. $g(t) = \operatorname{sgn}(\varphi(t)),\ \forall\, t \in \Delta'_i,\ \forall\, i = 1, 2, ..., r$;
ii. $g(t)$ este liniară în restul punctelor din $[a, b]$; (se pot da formule concrete, a se vedea exerciţiul anterior);
iii. dacă a sau b este extremitate a unui interval din a doua grupă, atunci $g(a) = 0$, (repectiv $g(b) = 0$).
Evident, funcţia g este continuă şi $\parallel g \parallel_\infty \leq 1$, deci:

$$\parallel J_\varphi \parallel \geq |J_\varphi(g)| =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{r} \int_{\Delta'_j} \varphi(t)\, g(t)\ dt + \sum_{k=1}^{s} \int_{\Delta''_k} \varphi(t)\, g(t)\ dt \right| \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{r} \int_{\Delta'_j} |\varphi(t)|\, dt - \sum_{k=1}^{s} \int_{\Delta''_k} |\varphi(t)|\, dt =$$

$$= \int_a^b |\varphi(t)|\, dt - 2 \sum_{k=1}^{s} \int_{\Delta''_k} |\varphi(t)|\, dt >$$

$$> \int_a^b |\varphi(t)|\, dt - 2\varepsilon\, (b - a).$$

Pentru $\varepsilon \to 0$, rezultă inegalitatea:

$$\parallel J_\varphi \parallel \geq \int_a^b |\varphi(t)|\ dt,$$

ceea ce încheie demonstraţia.

50. Fie $\mathcal{C}^1[a, b]$ spaţiul vectorial al funcţiilor de clasă C^1 definite pe intervalul compact $[a, b]$.
a. Să considerăm pe $\mathcal{C}^1[a, b]$ norma supremum: $\parallel f \parallel_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Să se demonstreze că aplicaţia de derivare

$$D : \mathcal{C}^1[a, b] \mapsto \mathcal{C}[a, b],\ D(f) = f',$$

este operator liniar dar nu este şi continuu. Pe spaţiul funcţiilor continue, $\mathcal{C}[a,b]$, este considerată, ca de obicei, norma supremum.
b. Să considerăm acum pe spaţiul $\mathcal{C}^1[a,b]$ norma:

$$\| f \| = \| f \|_\infty + \| f' \|_\infty .$$

Să se demostreze că aplicaţia de derivare D este în acest caz operator continuu.
Soluţie
a. Liniaritatea este evidentă. Fie şirul $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$; atunci $\| f_n \|_\infty = \frac{1}{n}$ şi deci $f_n \to 0$ în spaţiul normat $(\mathcal{C}^1[a,b], \| \ \|_\infty)$, dar şirul $D(f_n) = f_n'$ nu converge (la 0) în $\mathcal{C}[a,b]$.
b. Fie $f \in \mathcal{C}^1[a,b]$; din inegalitatea:

$$\| D(f) \|_\infty = \| f' \|_\infty \leq \| f \|_\infty \ + \ \| f' \|_\infty = \| f \|$$

rezultă că D este operator continuu.

51. Să se demonstreze că orice operator liniar $T : R^n \mapsto R^n$ este continuu (pe spaţiul R^n este considerată norma euclidiană, notată în continuare $\| \ \|_2$).
Soluţie
Fie T ca în enunţ, fie $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ baza canonică în R^n şi fie:

$$K = \max\{\| Te_1 \|_2, \| Te_2 \|_2, ..., \| Te_n \|_2\}.$$

Pentru orice vector $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in R^n$, au loc inegalităţile:

$$|x_i| \leq \| x \|_2, \ \forall\, i = 1, 2, ..., n.$$

De aici şi din inegalitatea triunghiului, rezultă:

$$\| Tx \|_2 = \| T \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) \|_2 = \| x_j T e_j \|_2 \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^n |x_j| \ \| Te_j \|_2 \leq \ nK \ \| x \|_2, \ \forall x \in R^n,$$

deci operatorul T este continuu şi $\| T \| \leq \ nK$. Evident, demonstraţia de mai sus rămâne adevărată şi pe spaţiul C^n.

52. Operatorul de înmulţire cu variabila independentă

Pe spaţiul Banach complex $(\mathcal{C}[a,b], \| \ \|_\infty)$ considerăm operatorul (de îmulţire cu variabila independentă):

$$(Mf)(x) = xf(x),\ \forall f \in \mathcal{C}[a,b],\ \forall x \in [a,b].$$

a. Să se demonstreze că M este liniar şi continuu şi $\| M \| = |b|$.
b. Să se demonstreze că spectrul lui M este :

$$\sigma(M) = [a,b].$$

c. Să se demonstreze că mulţimea valorilor proprii este vidă: $\sigma_p(M) = \emptyset$.
Soluţie
a. Pentru orice $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$ şi $\alpha, \beta \in C$, avem:

$$(M(\alpha f + \beta g))(x) = x(\alpha f + \beta g)(x) =$$

$$= \alpha x f(x) + \beta x g(x) = (\alpha Mf + \beta Mg)(x),\ \forall x \in [a,b],$$

deci M este liniar. Continuitatea:

$$\| Mf \|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |xf(x)| \le |b| \ \| f \|_\infty,\ \forall f \in \mathcal{C}[a,b], \forall x \in [a,b],$$

deci M este continuu şi în plus $\| M \| \le |b|$.
Notând cu $\mathbf{1}$ funcţia constantă 1, atunci $\| \mathbf{1} \|_\infty = 1$ şi deci:

$$\| M \| \ge \| M\mathbf{1} \|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |x| = |b|,$$

deci $\| M \| = |b|$.
b. Demonstrăm egalitatea $\sigma(M) = [a,b]$ prin dublă incluziune.
Prin definiţie, $\lambda \in \sigma(M)$ dacă şi numai dacă operatorul $\lambda I - M$ nu este inversabil (ceea ce este echivalent cu a fi bijectiv, conform teoremei lui Banach; a se vedea secţiunea teoretică a acestui capitol). Fie $\lambda_0 \in [a,b]$; din egalitatea:

$$((\lambda_0 I - M)(f))(x) = (\lambda_0 - x)f(x),\ \forall f \in \mathcal{C}[a,b],\ \forall x \in [a,b]$$

rezultă că operatorul $\lambda_0 I - M$ nu este surjectiv deoarece imaginea sa este:

$$\mathcal{I}\mathrm{m}(\lambda_0 I - M) = \{f \in \mathcal{C}[a,b] \mid f(\lambda_0) = 0\} \ne \mathcal{C}[a,b],$$

deci $[a,b] \subseteq \sigma(M)$. În locul incluziunii inverse $\sigma(M) \subseteq [a,b]$ demonstrăm incluziunea echivalentă: $C \setminus [a,b] \subseteq C \setminus \sigma(M)$. Fie $\lambda_0 \notin [a,b]$; atunci funcţia

$$\varphi : [a,b] \mapsto C,\ \varphi_0(x) = \frac{1}{\lambda_0 - x}$$

este corect definită şi continuă, deci $\| \varphi_0 \|_\infty < \infty$. Considerăm operatorul:

$$S : \mathcal{C}[a,b] \mapsto \mathcal{C}[a,b],\ (Sf)(x) = \varphi_0(x)f(x) = \frac{1}{\lambda_0 - x} f(x),\ \forall\, x \in [a,b].$$

Se demonstrează fără dificultate că S este operator liniar. Continuitatea rezultă din inegalitatea:

$$\| Sf \|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |\varphi_0(x)f(x)| \leq \| \varphi_0 \|_\infty \| f \|_\infty,\ \forall\, f \in \mathcal{C}[a,b].$$

În concluzie, operatorul $S \in \mathcal{L}(\mathcal{C}[a,b])$; în plus, au loc egalităţile:

$$(\lambda_0 I - M)Sf = (S(\lambda_0 I - M))f = \varphi_0 \frac{1}{\varphi_0} f = f,\ \forall\, f \in \mathcal{C}[a,b],$$

deci operatorul $\lambda_0 I - M$ este inversabil şi $(\lambda_0 I - M)^{-1} = S$, ceea ce demonstrează că $\lambda_0 \notin \sigma(M)$.
c. Pentru a demonstra că M nu are valori proprii, vom arăta că pentru orice $\lambda \in [a,b]$, operatorul $\lambda I - M$ este injectiv. Fie $\lambda_0 \in [a,b]$ şi fie $f \in \mathcal{C}[a,b]$ astfel încât $(\lambda_0 I - M)f = 0$; rezultă:

$$(\lambda_0 - x)f(x) = 0, \forall\, x \in [a,b].$$

De aici rezultă

$$f(x) = 0,\ \forall x \in [a,b] \setminus \{\lambda_0\}.$$

Funcţia f fiind continuă, rezultă şi $f(\lambda_0) = 0$, deci $f(x) = 0$, $\forall\, x \in [a,b]$; in concluzie, $\lambda_0 I - M$ este injectiv.

53. Operatorul de înmulţire
Exemplul anterior se poate generaliza după cum urmează. Fie $\phi \in \mathcal{C}[a,b]$ şi fie operatorul (de înmulţire cu funcţia ϕ):

$$M_\phi : \mathcal{C}[a,b] \mapsto \mathcal{C}[a,b],\ M_\phi f = \phi\, f.$$

a. Să se arate că M_ϕ este operator liniar şi continuu şi $\| M_\phi \| = \| \phi \|_\infty$.
b. Spectrul lui M_ϕ coincide cu imaginea funcţiei ϕ:

$$\sigma(M_\phi) = \{\phi(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

c. Operatorul M_ϕ are valori proprii dacă şi numai dacă există intervale (nedegenerate) $J \subseteq [a,b]$ astfel încât $\phi(x) = c, \forall\, x \in J$. În acest caz c este valoare proprie a lui M_ϕ.

Soluţie
a. Liniaritatea este imediată; din inegalitatea:

$$\| M_\phi f \|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |\phi(x)f(x)| \leq \| \phi \|_\infty \| f \|_\infty,$$

rezultă continuitatea şi $\| M_\phi \| \leq \| \phi \|_\infty$. Inegalitatea inversă rezultă ca în exerciţiul anterior.
b. Fie $A = \{\phi(x) \mid x \in [a,b]\}$ imaginea lui ϕ. Demonstrăm egalitatea $\sigma(M_\phi) = A$ prin dublă incluziune. Dacă $\lambda_0 \in A$, atunci există $x_0 \in [a,b]$ astfel încât $\phi(x_0) = \lambda_0$; de aici rezultă că operatorul $\lambda_0 I - M_\phi$ nu este surjectiv deoarece imaginea sa este:

$$\mathcal{I}\mathrm{m}(\lambda_0 I - M_\phi) = \{f \in \mathcal{C}[a,b] \mid f(x_0) = 0\} \neq \mathcal{C}[a,b].$$

Pentru a demonstra incluziunea inversă, fie $\lambda_0 \notin A$; atunci funcţia

$$\varphi_0 : [a,b] \mapsto C,\ \varphi_0(x) = \frac{1}{\lambda_0 - \phi(x)}$$

este corect definită şi continuă. Rezultă că operatorul $\lambda_0 I - M_\phi$ este inversabil, inversul său fiind operatorul de înmulţire cu funcţia φ_0:

$$(\lambda_0 I - M_\phi)^{-1} f = M_{\varphi_0} f = \varphi_0 f, \forall\, f \in \mathcal{C}[a,b].$$

Continuitatea operatorului M_{φ_0} se poate arăta direct, dar este şi o consecinţă a teoremei lui Banach (a se vedea secţiunea teoretică).
c. Fie $\lambda_0 \in \sigma(M_\phi) = A$ astfel încât există $f \in \mathcal{C}[a,b]$ cu proprietatea $(\lambda_0 I - M_\phi)f = 0$; dacă funcţia ϕ nu este constantă pe nici un interval, atunci, din egalitatea $(\lambda_0 - \phi(x))f(x) = 0, \forall\, x \in [a,b]$ şi din continuitatea lui f rezultă $f(x) = 0, \forall\, x \in [a,b]$, deci operatorul $\lambda_0 I - M_\phi$ este injectiv, deci λ_0 nu este valoare proprie pentru M_ϕ. Să presupunem acum că există $J \subseteq [a,b]$ astfel încât $\phi(x) = c, \forall\, x \in J$. Demonstrăm că c este valoare proprie a lui M_ϕ; pentru aceasta, considerăm o funcţie neidentic nulă $f_0 \in \mathcal{C}[a,b]$ astfel încât $f_0(x) = 0, \forall x \in [a,b] \setminus J$. Atunci f_0 este vector propriu asociat valorii proprii c:

$$((cI - M_\phi)f_0)(x) = 0,\ \forall\, x \in [a,b].$$

Operatorul de înmulţire se poate defini şi condiţii mai generale. De exemplu, dacă $D \subset R^n$ este o mulţime compactă şi dacă $\phi : D \mapsto C$ este o funcţie continuă, atunci, pe spaţiul $\mathcal{C}(D)$ al funcţiilor continue pe D se poate defini operatorul (de înmulţire cu ϕ): $M_\phi f = \phi f$. Se poate demonstra că proprietăţile demonstrate mai sus sunt adevărate şi în acest caz.

54. Operatorul integral

Fie $K : [a,b] \times [a,b] \mapsto R$ o funcţie continuă şi fie operatorul integral (asociat nucleului K) definit prin:

$$T_K : \mathcal{C}[a,b] \mapsto \mathcal{C}[a,b],\ (T_K(f))(s) = \int_a^b K(s,t)f(t)\,dt.$$

Pe spaţiul funcţiilor continue este considerată norma supremum.

a. Să se demonstreze că T_K este operator liniar şi continuu.

b. Norma operatorului T_K este:

$$\| T_K \| = \sup_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(s,t)|\,dt.$$

Soluţie

a. Pentru orice $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$ şi $\alpha, \beta \in R$ avem:

$$(T_K(\alpha f + \beta\, g))(s) = \int_a^b K(s,t)(\alpha f(t) + \beta\, g(t))\,dt =$$

$$= \alpha \int_a^b K(s,t)f(t)\,dt + \beta \int_a^b K(s,t)g(t)\,dt = \alpha(T_K f)(s) + \beta\,(T_K g)(s),$$

$\forall\, s \in [a,b]$, deci T_K este liniar.

Continuitatea operatorului T_K rezultă din inegalitatea:

$$\| T_K f \|_\infty = \sup_{s\in[a,b]} \left| \int_a^b K(s,t)f(t)\,dt \right| \leq$$

$$\leq \| f \|_\infty \sup_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(s,t)|\,dt,\ \forall\, f \in \mathcal{C}[a,b].$$

b. Din inegalitatea de mai sus rezultă şi inegalitatea

$$\| T_K \| \leq \sup_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(s,t)|\,dt.$$

Demonstrăm acum inegalitatea inversă. Aplicaţia

$$[a,b] \ni s \mapsto \int_a^b |K(s,t)|\,dt \in R$$

este continuă (definită pe un compact) şi deci există $s_0 \in [a,b]$ astfel încât:

$$\sup_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(s,t)|\,dt = \int_a^b |K(s_0,t)|\,dt.$$

Notăm $\phi(t) = K(s_0, t)$; evident, $\phi \in \mathcal{C}[a, b]$. Pe spaţiul Banach $\mathcal{C}[a, b]$ considerăm funcţionala (ca în exerciţiul 49.b)

$$J_\phi(f) = \int_a^b \phi(t) f(t)\, dt = \int_a^b K(s_0, t) f(t)\, dt.$$

Conform exerciţiului 49, J_ϕ este funcţională liniară şi continuă pe $\mathcal{C}[a, b]$ şi

$$\| J_\phi \| = \int_a^b |\phi(t)|\, dt = \int_a^b |K(s_0, t)|\, dt.$$

În demonstraţia egalităţii de mai sus s-a arătat (a se vedea soluţia exerciţiului 49.b) că pentru orice $\varepsilon > 0$, există o funcţie $g \in \mathcal{C}[a, b]$ astfel încât $\| g \|_\infty \leq 1$ şi

$$J_\phi(g) \geq \| J_\phi \| - \varepsilon.$$

Deoarece $\| g \| \leq 1$ avem:

$$\| T_K \| \geq \| T_K g \|_\infty \geq (T_K g)(s_0) = \int_a^b K(s_0, t) g(t)\, dt =$$

$$= J_\phi(g) \geq \| J_\phi \| - \varepsilon = \sup_{s \in [a,b]} \int_a^b |K(s, t)| - \varepsilon.$$

Deoarece $\varepsilon > 0$ a fost ales arbitrar, rezultă: $\| T_K \| = \sup_{s \in [a,b]} \int_a^b |K(s, t)|\, dt$.

55. Operatorul de convoluţie

Fie două şiruri $x, y : Z \mapsto C$, cu proprietatea că pentru orice $n \in Z$ seria $\sum_{k \in Z} x(n - k) y(k)$ este convergentă. În acest caz se poate defini şirul

$$x \star y : Z \mapsto C,\ (x \star y)(n) = \sum_{k \in Z} x(n - k) y(k),$$

numit convoluţia (sau produsul de convoluţie) şirurilor x şi y.

a. Să se demonstreze că pentru orice $x, y \in \ell^1(Z)$, există convoluţia $x \star y$.

b. Să se demonstreze că pentru orice $x, y \in \ell^1(Z)$, convoluţia $x \star y \in \ell^1(Z)$, şi în plus $\| x \star y \|_1 \leq \| x \|_1 \| y \|_1$

c. Produsul de convoluţie este comutativ şi asociativ.

d. Pentru orice $m \in Z$, fie şirul $\sigma_m(n) = \delta_m^n$, unde, δ_m^n este simbolul lui Kronecker. Să se demonstreze egalitatea:

$$(\sigma_m \star x)(n) = x(n - m),\ \forall\, x \in \ell^1(Z),\ \forall m, n \in Z.$$

În particular, σ_0 este element neutru pentru convoluţie.
e. Fie $\theta \in \ell^1(Z)$ un şir fixat şi fie operatorul (de convoluţie):

$$C_\theta : \ell^1(Z) \mapsto \ell^1(Z),\ C_\theta x = \theta \star x.$$

Să se demonstreze că operatorul C_θ este liniar şi continuu.
Soluţie
a. Fie $x, y \in \ell^1(Z)$ şi fie $n \in Z$; atunci:

$$\sum_{k\in Z} |x(n-k)y(k)| \ \leq \ \sum_{k\in Z} \left(|x(n-k)| \sum_{k\in Z} |y(k)| \right) = \| \ y \ \|_1 \| \ x \ \|_1 \ .$$

b. Fie $x, y \in \ell^1(Z)$; atunci:

$$\| \ x \star y \ \|_1 = \sum_{n\in Z} |(x \star y)(n)| = \sum_{n\in Z} \left| \sum_{k\in Z} x(n-k)y(k) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n\in Z} \sum_{k\in Z} |x(n-k)y(k)| = \sum_{k\in Z} \left(|y(k)| \sum_{n\in Z} |x(n-k)| \right) =$$

$$= \left(\sum_{k\in Z} |y(k)| \right) \left(\sum_{m\in Z} |x(m)| \right) = \| \ x \ \|_1 \ \| \ y \ \|_1,$$

comutarea sumelor (în k şi n) fiind corectă datorită absolut convergenţei ambelor serii.
c. Pentru orice $x, y \in \ell^1(Z)$ şi $n \in Z$, avem:

$$(x \star y)(n) = \sum_{k\in Z} x(n-k)y(k) = \sum_{m\in Z} x(m)y(n-m) = (y \star x)(n).$$

Analog se demonstrează şi asociativitatea.
d. Pentru orice $x \in \ell^1(Z)$ şi $m, n \in Z$, avem:

$$(\sigma_m \star x)(n) = (x \star \sigma_m)(n) = \sum_{k\in Z} x(n-k)\sigma_m(k) = x(n-m).$$

e. Lăsăm liniaritatea ca exerciţiu. Fie $\theta \in \ell^1(Z)$, fixat; atunci, pentru orice $x \in \ell^1(Z)$, aplicând inegalitatea de la punctul b, avem:

$$\| \ C_\theta x \ \|_1 = \| \ \theta \star x \ \|_1 \leq \| \ \theta \ \|_1 \ \| \ x \ \|_1,$$

ceea ce încheie demonstraţia.

56. Fie $(X, \| \ \|)$ un spaţiu Banach şi fie $T \in \mathcal{L}(X)$ un operator astfel încât $\| T \| < 1$. Să se demonstreze că $I - T$ este operator inversabil şi

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n \geq 0} T^n.$$

În plus, are loc inegalitatea:

$$\| (I - T)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| T \|}.$$

Soluţie
Spaţiul $\mathcal{L}(X)$ este complet, deci orice serie (de operatori) absolut convergentă este şi convergentă. Fie seria $\sum_{n \geq 0} T^n$; seria converge absolut:

$$\sum_{n \geq 0} \| T^n \| \leq \sum_{n \geq 0} \| T \|^n = \frac{1}{1 - \| T \|},$$

deci converge în spaţiul $\mathcal{L}(X)$. Fie $S \in \mathcal{L}(X)$ suma acestei serii şi fie $S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k$ şirul sumelor parţiale asociat; atunci:

$$(I - T)S_n = (I - T)(I + T + t^2 + ... + T^n) = I - T^{n+1}.$$

Dar şirul T^{n+1} converge la O în spaţiul $\mathcal{L}(X)$:

$$\| T^{n+1} \| \leq \| T \|^{n+1} \to 0, \text{ când } n \to \infty,$$

deci $(I - T)S = I$. Analog se arată şi egalitatea $S(I - T) = I$, deci într-adevăr $S = (I - T)^{-1}$. În plus, dintr-un calcul făcut mai sus, rezultă:

$$\| (I - T)^{-1} \| = \| \sum_{n \geq 0} T^n \| \leq \frac{1}{1 - \| T \|},$$

ceea ce încheie demonstraţia.

Capitolul 3

Şiruri şi serii de funcţii Funcţii elementare

3.1 Noţiuni teoretice

Convergenţă punctuală şi convergenţă uniformă
Fie (X, d) un spaţiu metric, fie $f_n : X \mapsto R(C)$ un şir de funcţii şi fie $f : X \mapsto R(C)$ o funcţie.
Şirul f_n converge punctual (sau simplu) la f dacă

$$\lim_{n\to\infty}(x) = f(x), \forall x \in X.$$

Se spune că f este limita punctuală a şirului f_n.
Şirul f_n este uniform convergent la f dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0 \text{ astfel încât } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon), \forall x \in X.$$

Într-o formulare echivalentă, şirul f_n converge uniform la f dacă şi numai dacă

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Evident, convergenţa uniformă implică convergenţa punctuală, reciproca fiind falsă.
Dacă f_n sunt funcţii mărginite, atunci convergenţa uniformă coincide cu convergenţa în spaţiul metric al funcţiilor mărginite, $(\mathcal{M}, d_\infty)$.
Dacă funcţiile f_n sunt continue, iar şirul f_n converge simplu la f, nu rezultă, în general, continuitatea funcţiei f. De exemplu, şirul de funcţii continue

$$f_n : [0, 1] \mapsto R,\ f_n(x) = x^n$$

converge punctual la funcţia discontinuă $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad x \in [0,1) \\ 1 & \text{dacă} \quad x = 1 \end{cases}$

Are loc următorul rezultat:

Transfer de continuitate

Dacă f_n sunt funcţii continue şi şirul f_n converge uniform la f, atunci funcţia f este continuă.

Integrare termen cu termen

Fie $f_n, f : [a,b] \mapsto R$ funcţii continue.

Dacă f_n converge uniform la f , atunci

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Să considerăm şirul $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, $x \in R$. Şirul f_n converge uniform la funcţia constantă 0:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in R} |f(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Funcţiile f_n sunt derivabile, dar şirul derivatelor $f_n'(x) = \cos(nx)$ nu converge (nici punctual). Rezultatul următor dă condiţii suficiente în care şirul derivatelor converge:

Derivare termen cu termen

Presupunem că funcţiile f_n sunt derivabile, $\forall\, n \in N$. Dacă şirul f_n converge punctual la f şi dacă există $g : [a,b] \mapsto R$ astfel încât f_n' converge uniform la g, atunci f este derivabilă şi $f' = g$.

Serii de funcţii

Fie $u_n : X \mapsto R(C)$ un şir de funcţii şi fie $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_n$ şirul sumelor parţiale. Se spune că seria $\sum_n u_n$ este punctual (simplu) convergentă dacă s_n este punctual convergent. Seria este uniform convergentă dacă s_n converge uniform. Suma seriei este limita (punctuală sau uniformă) a şirului sumelor parţiale.

Criteriul lui Weierstrass de convergenţă uniformă

Dacă există un şir cu termeni pozitivi a_n astfel încât $|u_n(x)| \leq a_n, \forall x \in X$ şi seria $\sum_n a_n$ converge, atunci seria $\sum_n u_n$ converge uniform.

Transfer de continuitate

Dacă u_n sunt funcţii continue şi seria $\sum_n u_n$ converge uniform la f, atunci

funcţia f este continuă.

Integrare şi derivare termen cu termen

Se spune că o serie de funcţii $\sum_n f_n$ are proprietatea de integrare termen cu termen pe intervalul $[a,b]$ dacă $\int_a^b \left(\sum_n f_n(x)\right) dx = \sum_n \int_a^b f_n(x)dx$.

Se spune că o serie de funcţii $\sum_n f_n$ are proprietatea de derivare termen cu termen pe mulţimea D dacă $\left(\sum_n f_n(x)\right)' = \sum_n f_n'(x)$, $\forall\, x \in D$.

Are loc următorul rezultat:

Fie $u_n : [a,b] \mapsto R$ un şir de funcţii continue.

a. Dacă seria $\sum_n u_n$ converge uniform la f , atunci f este integrabila şi $\int_a^b \sum_n u_n(x)dx = \sum_n \int_a^b u_n(x)dx$.

b. Presupunem că funcţiile u_n sunt derivabile. Dacă seria $\sum_n u_n$ converge punctual la f şi dacă există $g : [a,b] \mapsto R$ astfel încât $\sum_n u_n'$ converge uniform la g, atunci f este derivabilă şi $f' = g$.

Trebuie menţionat că ipotezele teoremei de mai sus sunt condiţii suficiente (nu şi necesare) pentru ca o serie să se poată integra (respectiv deriva) termen cu termen.

Formula lui Taylor

Fie $I \subseteq R$ un interval deschis şi fie $f : I \mapsto R$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^m$ pe I. Pentru orice $a \in I$ definim polinomul Taylor de gradul $n \leq m$ asociat funcţiei f în punctul a:

$$T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Restul de ordin n este, prin definiţie,

$$R_{n,f,a}(x) = f(x) - T_{n,f,a}(x).$$

Polinoamele Taylor de gradul întâi (respectiv de gradul al doilea) se numesc aproximarea liniară (respectiv pătratică) ale funcţiei în jurul punctului a.

Teoremă (Formula lui Taylor cu restul Lagrange)

Fie $f : I \mapsto R$ de clasă $\mathcal{C}^{n+1}$ şi $a \in I$. Atunci, pentru orice $x \in I$, există

$\xi \in (a, x)$ (sau (x, a)) astfel încât

$$f(x) = T_{n,f,a}(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Observaţii
1. Restul de ordin n poate fi scris sub forma Peano :
$\exists\, \omega : I \mapsto R$ astfel încât $\lim\limits_{x \to a} \omega(x) = \omega(a) = 0$ şi
$R_{n,f,a}(x) = \dfrac{(x-a)^n}{n!}\omega(x)$.
2. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{R_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$.
3. Restul de ordin n poate fi scris sub forma integrală:

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Seria Taylor

Fie $I \subseteq R$ un interval deschis şi fie $f : I \mapsto R$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^\infty$ pe I. Pentru orice $x_0 \in I$ definim seria Taylor asociată funcţiei f în punctul x_0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Observaţii
1. Seria Taylor asociată funcţiei f în punctul x_0 este o serie de puteri.
2. Seria Taylor asociată lui f în $x_0 = 0$ se mai numeşte şi serie Mc Laurin.
Teorema de reprezentare a funcţiilor prin serii Taylor
Fie $a < b$ şi fie $f \in \mathcal{C}^\infty([a, b])$ astfel încât există $M > 0$ cu proprietatea că $\forall n \in N, \forall x \in [a, b],\ |f^{(n)}(x)| \leq M$. Atunci pentru orice $x_0 \in (a, b)$, seria Taylor a lui f în jurul lui x_0 este uniform convergentă pe $[a, b]$ şi suma ei este funcţia f, adică $f(x) = \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,\ \forall x \in [a, b]$.

Serii de puteri

Fie $(a_n)_{n \in N}$ un şir de numere complexe şi $a \in C$. Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ se numeşte seria de puteri centrată în a definită de şirul a_n.
Formula razei de convergenţă
Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ şi fie $\alpha = \limsup\limits_n \sqrt[n]{|a_n|}$.

Raza de convergenţă a seriei date, (notată R), se defineşte astfel:

$$R = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad \alpha = \infty \\ \infty & \text{dacă} \quad \alpha = 0 \\ \frac{1}{\alpha} & \text{dacă} \quad \alpha \in (0, \infty) \end{cases}$$

Teorema lui Abel

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ o serie de puteri şi fie R raza sa de convergenţă.

1. Dacă $R = 0$, atunci seria converge numai pentru $z = a$.

2. Dacă $R = \infty$, atunci seria converge absolut pentru orice $z \in C$.

3. Dacă $R \in (0, \infty)$, atunci seria este absolut convergentă pentru $|z-a| < R$ şi divergentă pentru $|z-a| > R$.

4. Seria este uniform convergentă pe orice disc închis $|z-a| \leq r$, $\forall r \in (0, R)$.

Derivare şi integrare termen cu termen

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ o serie de puteri şi fie $S(z)$ suma sa.

1. Seria derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-a)^{n-1}$ are aceeasi rază de convergenţă cu seria iniţială şi suma sa este $S'(z)$.

2. Seria primitivelor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ are aceeasi rază de convergenţă cu seria iniţială şi suma sa este o primitivă a lui S.

Functii elementare

1. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n, \ \forall z \in C.$

2. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \ \forall\, |z| < 1.$

3. $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \ \forall\, |z| < 1.$

4. $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n}, \ \forall\, z \in C.$

5. $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1}, \ \forall\, z \in C.$

6. $(1+z)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \ \forall\, |z| < 1, \ \alpha \in R.$

3.2 Şiruri şi serii de funcţii

Să se studieze convergenţa punctuală şi uniformă a următoarelor siruri de funcţii (exerciţiile 1-9):

1. $u_n : (0,1) \mapsto R$; $u_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}, n \geq 0.$

Soluţie

Fie $x > 0$, fixat. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{nx+1} = 0$, deci u_n converge punctual la $f(x) = 0$.

Evident, $\sup\limits_{x\in(0,1)} |u_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in(0,1)} \left|\dfrac{1}{nx+1}\right| = 1$ si deci u_n nu converge uniform la f.

2. $u_n : [0,1] \mapsto R$; $u_n(x) = nx(1-x)^n, n \geq 0.$

Soluţie

Pentru orice $x \in (0,1)$, fixat, avem:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} nx(1-x)^n = 0,$$

şi deci u_n converge punctual $f(x) = 0$.

Studiem acum convergenţa uniformă:

$$\sup_{x\in(0,1)} |u_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,1)} |nx(1-x)^n| = u_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \to \frac{1}{e},$$

deci u_n nu este uniform convergent.

3. $u_n : [0,1] \mapsto R$; $u_n(x) = x^n - x^{2n}$,$n \geq 0.$

Soluţie

Pentru orice $x \in [0,1]$ fixat, rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} (x^n - x^{2n}) = 0,$$

deci u_n converge punctual la $f(x) = 0$.

Studiem convergenţa uniformă:

$$\sup_{x\in(0,1)} |u_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,1)} |x^n - x^{2n}| = u_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) = \frac{1}{4},$$

deci u_n nu converge uniform.

4. $u_n : R \mapsto R$; $u_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $n > 0$.

Soluţie

Fie $x \in R$, fixat; atunci:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x|,$$

deci u_n converge punctual $f(x) = |x|$, $\forall x \in R$.
Studiem convergenţa uniformă:

$$\sup_{x\in R} |u_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in R} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} \right| =$$

$$= \sup_{x\in R} \frac{1}{n^2 \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2} \right)} = \frac{1}{n} \to 0,$$

deci u_n converge uniform la f. Se observă că pentru orice $n \in N$, u_n este funcţie derivabilă, dar f nu este derivabilă.

5. $u_n : (-\infty, 0) \mapsto R$, $u_n(x) = \dfrac{e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1}, n \geq 0$.

Soluţie

Fie $x < 0$, fixat; atunci:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1} = -1,$$

deci u_n converge punctual la $f(x) = -1$, $\forall x \in (-\infty, 0)$.
Convergenţa uniformă:

$$\sup_{x\in(-\infty,0)} |u_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(-\infty,0)} \left| \frac{e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1} + 1 \right| = 1,$$

deci u_n nu converge uniform.

6. $u_n : R \mapsto R$, $u_n(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{1 + n(n+1)x^2}, n > 0$.

Soluţie

Fie $x \in R$, fixat; atunci:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \arctan \frac{x}{1 + n(n+1)x^2} = 0,$$

deci u_n converge punctual la $f(x) = 0$, $\forall x \in R$. Convergenţa uniformă:

$$\sup_{x\in R} |u_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in R} \left|\operatorname{arctg} \frac{x}{1 + n(n+1)x^2}\right|.$$

Funcţiile u_n sunt impare deci este suficient să gasim supremumul pe intervalul $(0, \infty)$.

$$u_n'(x) = \left(\arctan \frac{x}{1 + n(n+1)x^2}\right)' = \frac{1 - n(n+1)x^2}{x^2 + (1 + n(n+1)x^2)^2},$$

deci supremumul este atins în $x = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; în final rezultă că u_n este uniform convergent.

7. $u_n : (1, \infty) \mapsto R,\ u_n(x) = \sqrt{(n^2+1)\sin^2 \frac{\pi}{n} + nx} - \sqrt{nx}, n > 0.$

Soluţie

Folosim inegalitatea $\sin x \leq x$,$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ şi obţinem :

$$0 \leq u_n(x) \leq \frac{(n^2+1)\sin^2 \frac{\pi}{n}}{\sqrt{(n^2+1)\sin^2 \frac{\pi}{n} + nx} + \sqrt{nx}} <$$

$$< \frac{(n^2+1)\frac{\pi^2}{n^2}}{2\sqrt{n}} < \frac{\pi^2}{\sqrt{n}} \to 0,$$

deci şirul u_n este uniform convergent la 0 .

8. $u_n(x) = x^n e^{-nx},\ x \geq 0.$

Soluţie

Fie $x \geq 0$, fixat. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = 0$, deci şirul converge punctual la funcţia $f(x) = 0$, $\forall x \geq 0$. Studiind variaţia funcţiei u_n, rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 0} |u_n(x)| = \lim_{n\to\infty} |u_n(1)| = \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0,$$

deci şirul este uniform convergent.

9. $u_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n + x},\ x \in [0, 1].$

Soluţie

Fie $x \in [0, 1]$, fixat. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = x$, deci şirul u_n converge punctual la $f(x) = x$, $\forall x \in [0, 1]$. Pentru a studia convergenţa uniformă, calculăm:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |u_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \frac{x + x^2}{1 + n + x} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2 + n} = 0,$$

deci şirul converge uniform; faptul că supremumul de mai sus se atinge în $x = 1$ rezultă din studiul variaţiei funcţiei $x \mapsto \dfrac{x + x^2}{1 + n + x}$ pe $[0, 1]$ (funcţia este crescătoare).

10. Fie şirul $u_n : R \mapsto R$, $u_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $n > 0$.
Să se studieze convergenţa şirurilor u_n şi u_n'.
Soluţie
Din inegalitatea

$$\left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,$$

rezultă că şirul u_n converge uniform la 0 .
Şirul derivatelor nu este punctual convergent:

$$(u_n(x))' = \sqrt{n} \cos nx.$$

11. Fie şirul $u_n : R \mapsto R$, $u_n(x) = x + \dfrac{1}{n}$.
Să se studieze convergenţa şirurilor u_n şi u_n^2.
Soluţie
Şirul u_n converge uniform la $f(x) = x$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in R} |u_n(x) - x| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Şirul u_n^2 converge punctual la $f^2(x) = x^2$, dar nu converge uniform:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in R} |u_n^2(x) - x^2| = \lim_{n\to\infty} |2\frac{x}{n} + \frac{1}{n^2}| = \infty.$$

12. Fie şirul $u_n : [0, \infty) \mapsto R$, $u_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + xe^{-n}}{x + n}, n \in N$ si fie $A_n = \displaystyle\int_0^1 u_n(x)dx, \forall n \in N^*$. Să se studieze convergenţa şirului u_n şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.
Soluţie
Fie $x \geq 0$, fixat.

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{ne^{-x} + xe^{-n}}{x + n} = e^{-x},$$

deci u_n converge punctual la $f(x) = e^{-x}$, $\forall x \geq 0$.
Evaluăm în continuare

$$g_n(x) = |u_n(x) - f(x)| = \left(1 - \frac{n}{n + x}\right) |e^{-n} - e^{-x}|, \forall\, x > 0, \forall\, n \in N^*.$$

Dacă $x \in (n, \infty)$ atunci:

$$e^{-x} < e^{-n} \Rightarrow |e^{-n} - e^{-x}| < e^{-n} \Rightarrow g_n(x) < e^{-n} \to 0.$$

Dacă $x \in [0, n]$ atunci

$$e^{-x} \geq e^{-n} \Rightarrow |e^{-n} - e^{-x}| \leq |e^{-n}| + |e^{-x}| =$$

$$= e^{-n} + e^{-x} \leq 2e^{-x},$$

deci

$$g(x) \leq \frac{2xe^{-x}}{x+n}, \forall\, x \in [0, n].$$

Studiem acum variaţia funcţiei $[0, 1] \ni x \mapsto \dfrac{2xe^{-x}}{x+n}$.

$$\left(\frac{2xe^{-x}}{x+n}\right)' = 2\frac{e^{-x}}{(x+n)^2} \cdot (-x^2 - nx + n),$$

deci functia $\dfrac{2xe^{-x}}{x+n}$ este crescătoare pe $(0, \frac{\sqrt{n^2+4n}-n}{2})$ şi descrescătoare pe $(\frac{\sqrt{n^2+4n}-n}{2}, n)$,deci

$$g_n(x) \leq \frac{8n}{(\sqrt{n^2+4n}+n)^2} \cdot e^{-\frac{2n}{\sqrt{n^2+4n}+n}} \to 0.$$

Deci u_n converge uniform la f .
Aplicând transferul de integrabilitate obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 e^{-x}dx = \frac{e-1}{e}.$$

13. Fie $u_n : (0, \infty) \mapsto R,\ u_n(x) = e^{-nx}$. Să se studieze convergenţa şirurilor u_n şi u_n'.
Soluţie
Şirurile u_n şi u_n' converg simplu la funcţia constantă zero, dar nu converg uniform.

14. Fie şirul $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto R$, definit prin relaţia de recurenţă:

$$f_1(x) = x,\ f_{n+1}(x) = \sin\left(f_{n-1}(x)\right).$$

Să se studieze convergenţa punctuală şi uniformă.
Soluţie
Fie $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ fixat. Şirul $f_n(x)$ este descrescător:

$$f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x)) \leq f_n(x), \forall\, n \in N$$

şi mărginit:

$$0 \leq f_n(x) \leq x, \forall n \in N.$$

Deci şirul f_n este punctual convergent.
Fie $f : [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto R$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, se obţine: $f(x) = \sin(f(x)), \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Se demonstrează simplu că singura soluţie a ecuaţiei $t = \sin t$ este $t = 0$, deci funcţia f este constantă zero. Studiem acum convergentă uniformă; pentru aceasta, trebuie calculat $\sup\limits_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |f_n(x)|$. Demonstram în continuare că funcţia f_n este crescătoare pentru orice $n \in N$ şi deci supremumul de mai sus este $f_n(\frac{\pi}{2})$. Şirul $f_n(\frac{\pi}{2})$ converge la zero (deoarece s-a demonstrat mai sus că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0,\ \forall\, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$) şi deci f_n este uniform convergent.
Demonstraţia faptului că f_n sunt funcţii crescătoare se face prin inducţie: f_1 este crescătoare; presupunem că f_k sunt crescătoare pentru orice $1 \leq k \leq n$ şi demonstrăm că f_{n+1} este crescătoare. Fie $0 \leq x < y \leq \dfrac{\pi}{2}$; atunci:

$$f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x)) \leq \sin(f_n(y)) = f_{n+1}(y),$$

deci f_{n+1} este funcţie crescătoare, ceea ce încheie demonstraţia.

15. Fie şirul $f_n : [0, \infty) \mapsto R$, $f_n(x) = x^{1+\frac{1}{n}}$.
a. Să se studieze convergenţa punctuală.
b. Să se studieze convergenţa uniformă pe $[0, 1]$.
c. Să se studieze convergenţa uniformă pe $[1, \infty)$.
d. Să se studieze convergenţa punctuală a şirului derivatelor (acolo unde există).
e. Să se studieze convergenţa uniformă a şirului derivatelor pe $[0, 1]$.
Soluţie
a. Fie $x \geq 0$, fixat; atunci

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^{1+\frac{1}{n}} = x,$$

deci f_n converge punctual la $f(x) = x$.
b. Pentru a studia convergenţa uniformă pe $[0, 1]$, calculăm:

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left(x - x^{1+\frac{1}{n}}\right).$$

Studiind variaţia funcţiei de mai sus, rezultă că supremumul se atinge în $x = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = 0,$$

deci şirul f_n converge uniform pe $[0,1]$ la funcţia f.
c. Şirul nu converge uniform la f pe $[1,\infty)$. Procedând ca mai sus, obţinem:

$$\sup_{x\geq 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq 1} x\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \infty.$$

d. Evident, $f_n'(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{\frac{1}{n}}$. Pentru orice $x > 0$, fixat, avem:

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} x^{\frac{1}{n}} = 1 = f'(x).$$

În $x = 0$, avem $\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = 0$. Deci şirul derivatelor converge punctual pentru orice $x \in [0,\infty)$.
e. Şirul derivatelor nu converge uniform pe $[0,1]$: $\sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{n}{n+1} x^{\frac{1}{n}} - 1\right| \geq 1$. Un alt argument este faptul că funcţia limită (a şirului derivatelor) nu este continuă.

Să se studieze convergenţa următoarelor serii de funcţii şi să se decidă dacă se pot deriva termen cu termen (exerciţiile 16-22):

16. $\sum_n n^{-x}, x \in R.$

Soluţie
Seria converge punctual dacă şi numai dacă $x \in (1,\infty)$ (se compară cu seria lui Riemann).
Fie $r > 1$; pentru orice $x \geq r$, avem $\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^r}$. Seria $\sum_n \frac{1}{n^r}$ este convergentă şi deci, conform criteriului lui Weierstrass, seria converge uniform pe intervalul $[r,\infty)$.
Seria derivatelor: $\sum_{n\geq 1} \left(n^{-x}\right)' = -\sum_{n\geq 1} n^{-x} \ln n$ converge uniform pe orice interval $[r,\infty)$; se aplică criteriul lui Weierstrass:

$$\sum_{n\geq 1} n^{-x} \ln n \leq \sum_{n\geq 1} n^{-r} \ln n, \, \forall\, x \geq r.$$

Ultima serie (numerică) este convergentă.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}, x \in R.$

Soluţie

$|u_n(x)| = \left|\frac{\sin nx}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$,$\forall x \in R$.

Seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ este convergentă şi din criteriul lui Weierstrass rezultă că seria

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{2^n}$$

este uniform convergentă pe R.

Seria derivatelor $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{\sin nx}{2^n}\right)' = \sum_{n\geq 1} \frac{n\cos nx}{2^n}$ converge uniform pe R (criteriul lui Weierstrass), deci seria se poate deriva termen cu termen.

18. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 + (\varphi(x))^2}$, unde $\varphi : [a,b] \mapsto R$ este o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$ arbitrară.

Soluţie

Seria are termeni pozitivi şi $\frac{1}{n^2 + (\varphi(x))^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, deci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (\varphi(x))^2}$ este uniform convergentă pe $[a,b]$.

Seria derivatelor $\sum_{n\geq 1} \frac{-2\varphi(x)\varphi'(x)}{(n^2 + (\varphi(x))^2)^2}$ este uniform convergentă pe $[a,b]$, deci seria se poate deriva termen cu termen.

19. $\sum_{n\geq 1} \frac{(x+n)^2}{n^4}$; $x \in [a,b]$, $0 < a < b$.

Soluţie

Din inegalităţile $0 < a < b$ şi $a \leq x \leq b$ rezultă $(x+n)^2 \leq (b+n)^2$ şi deci

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(x+n)^2}{n^4} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{(b+n)^2}{n^4}.$$

Aplicând criteriul lui Weierstrass, rezultă că seria este uniform convergentă pe $[a,b]$.

Seria derivatelor converge uniform pe $[a,b]$, deci seria se poate deriva termen cu termen.

20. $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$; $x > 0$.

Soluţie

Aplicând inegalitatea $\ln(1+x) \leq x$ obţinem

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^{n-1}}.$$

Ultima serie este convergentă dacă $\frac{1}{x} \in (-1,1)$ (deci $x \in (1,\infty)$) şi divergentă în rest . Deci seria iniţială este simplu convergentă pentru $x \in (1,\infty)$. Seria converge uniform pe orice interval $[\alpha,\infty), \alpha > 1$.
Dacă $x \in (0,1]$, atunci din inegalitatea:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n} \geq \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(1+nx)}{n},$$

rezultă că seria este divergentă, deoarece ultima serie este divergentă (criteriul necesar). În concluzie, seria dată converge dacă şi numai dacă $x > 1$.
Seria derivatelor este:

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{(1+nx)x^n} - \frac{\ln(1+nx)}{x^{n+1}} \right).$$

Fie $r > 1$; din inegalităţile:

$$\left| \frac{1}{(1+nx)x^n} \right| \leq \frac{1}{(1+nr)r^n}, \forall\, x \in [r,\infty),$$

$$\left| \frac{\ln(1+nx)}{(1+nx)x^{n+1}} \right| \leq \frac{n}{x^n} \leq \frac{n}{r^n}, \forall\, x \in [r,\infty),$$

rezultă că seria derivatelor converge uniform pe orice interval $[r,\infty)$, $r > 1$.

21. $\sum_{n\geq 0} x^n(1-x),\ x \geq 0$.

Soluţie

Şirul sumelor parţiale este

$$s_n(x) = 1 - x^{n+1}.$$

Rezultă că seria converge simplu pentru orice $x \in [0,1]$.
Suma seriei este

$$s : [0,1] \mapsto R,\ s(x) = 1, \forall x \in [0,1) \text{ şi } s(1) = 0.$$

Seria nu converge uniform pe $[0,1]$ (altfel suma seriei ar fi continuă), dar converge uniform pe orice interval $[0,\alpha]$, $\alpha<1$.
Seria derivatelor $\sum_{n\geq 0}(nx^{n-1}-(n+1)x^n)$ are şirul sumelor parţiale

$$s_n'(x)=-(n+1)x^n$$

care converge uniform pe orice interval compact $[0,r], \forall\, r<1$.

22. $\sum_{n\geq 0} e^{-nx}$, $x>0$.

Soluţie

Şirul sumelor parţiale este $s_n(x)=\sum_{k=0}^{n} e^{-kx}=\dfrac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}$. Seria converge punctual la funcţia $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{-x}}$ pentru orice $x>0$; seria nu converge uniform pe $(0,\infty)$:

$$\sup_{x>0}\left|\sum_{k=0}^{n} e^{-kx}-f(x)\right|=\sup_{x>0}\left|\frac{-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}=\infty.$$

Seria derivatelor $\sum_{n\geq 0}\left(-ne^{-nx}\right)$ are şirul sumelor parţiale

$$s_n'(x)=\left(\frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}\right)'=\frac{(n+1)e^{-(n+1)x}-ne^{-(n+2)x}-e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}.$$

Pentru orice $x>0$ fixat avem

$$\lim_{n\to\infty} s_n'(x)=-\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2},$$

deci seria derivatelor converge punctual la derivata sumei. Convergenţa nu este uniformă pe $(0,\infty)$, dar seria derivatelor converge uniform pe orice interval compact $[r,\infty)\, r>0$ (se poate face un raţionament asemănător cu cel pentru seria iniţială).

23. Să se demonstreze că funcţia $f:R\mapsto R$, $f(x)=\sum_{n\geq 1}\dfrac{\sin nx}{n(n+1)}$ este continuă. Se poate deriva seria termen cu termen ?

Soluţie

Seria este uniform convergentă (se aplică criteriul lui Weierstrass):

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n(n+1)}\leq\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)},$$

ultima serie fiind convergentă. Seria derivatelor $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n+1}$ nu converge punctual, deci seria nu se poate deriva termen cu termen.

24. Fie seria de funcţii $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$, $x \in R$.

a. Să se studieze convergenţa punctuală pentru orice $x \in R$ şi convergenţa uniformă pe orice interval $[a, b]$. Este seria uniform convergentă pe R?

b. Să se studieze absolut convergenţa pentru orice $x \in R$.

c. Să se studieze continuitatea sumei seriei (acolo unde ea există).

d. Se poate deriva seria termen cu termen ?

Soluţie

a. Fie $x \in R$; seriile numerice $\sum_n (-1)^n \frac{x^2}{n^2}$ şi $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$ sunt ambele convergente, deci seria dată este punctual convergentă pentru orice $x \in R$.

Studiem acum convergenţa uniformă pe intervalul $[a, b]$. Seria $\sum_n (-1)^n \frac{x^2}{n^2}$ este uniform convergentă pe $[a, b]$; pentru aceasta, aplicăm criteriul lui Weierstrass de convergenţă uniformă pentru serii:

$$\left|(-1)^n \frac{x^2}{n^2}\right| \leq \frac{b^2}{n^2}, \forall x \in [a, b],$$

iar seria numerică $\sum_n \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

Seria nu este uniform convergentă pe R; pentru aceasta, fie a suma seriei $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2}$ şi b suma seriei $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$. Evident, seria dată converge punctual la funcţia $f(x) = ax^2 + b$. Fie $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}$. Calculăm:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in R} |f(x) - s_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in R} x^2 \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} - a\right| = \infty,$$

deci seria nu converge uniform pe R la f.

b. Seria nu converge absolut pentru nici un $x \in R$ deoarece seria $\sum_n \frac{x^2+n}{n^2}$ este divergentă (se poate compara cu seria armonică).

c. Evident, funcţia f (suma seriei) este continuă pe R (deşi seria nu converge uniform pe R).

d. Seria nu verifică ipotezele teoremei de derivare termen pe R: seria dată trebuie să conveargă punctual, iar seria derivatelor să conveargă uniform; prima condiţie a fost verificată. Seria derivatelor este $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{2x}{n^2}$, serie care nu este uniform convergentă pe R:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in R}\left|\,2x\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}-2ax\,\right|=\infty.$$

Menţionăm totuşi că seria derivatelor converge uniform pe orice compact din R. Seria dată se poate deriva termen cu termen, egalitatea

$$\left(x^2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}\right)'=2x\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2},\forall\, x\in R$$

fiind evident adevărată.

25. Fie seria $\sum_{n\geq 1}\frac{nx^n+x}{n^2+1}$.

a. Pentru ce valori ale lui $x\in R$ seria converge ?

b. Să se studieze convergenţa uniformă.

c. Se poate deriva seria termen cu termen ?

Soluţie

a. Fie $x\in(-1,1)$, fixat. Descompunem seria:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{nx^n+x}{n^2+1}=x\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+1}+\sum_{n\geq 1}\frac{n}{n^2+1}x^n.$$

Prima serie este convergentă pentru orice $x\in R$. A doua serie converge absolut dacă $x\in(-1,1)$; pentru demonstraţie se poate aplica criteriul raportului:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{(n+1)^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|=|x|<1.$$

Dacă $x=-1$, seria converge (cele două serii de mai sus sunt convergente) dar nu converge absolut.
Dacă $x=1$ seria este divergentă (se poate compara cu seria armonică).
Dacă $|x|>1$ seria diverge (se poate aplica criteriul necesar).
In concluzie, seria converge dacă şi numai dacă $x\in[-1,1)$.

b. Aplicând criteriul lui Weierstrass, seria converge absolut şi uniform pe orice compact $[-r, r] \subset (-1, 1)$:

$$\sum_{n\geq 1}\left|\frac{nx^n+x}{n^2+1}\right| \leq \sum_{n\geq 1}\frac{nr^n+r}{n^2+1}, \forall\, |x| \leq r,$$

iar ultima serie (numerică) este convergentă.
c. Seria derivatelor este:

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{nx^n+x}{n^2+1}\right)' = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{n^2}{n^2+1}x^{n-1}+\frac{1}{n^2+1}\right) =$$

$$= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+1} + \sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{n^2+1}x^{n-1}.$$

Seria derivatelor converge uniform pe orice interval $[-r, r] \subset (-1, 1)$, deci seria se poate deriva termen cu termen.

26. Să se stabilească natura seriei $\sum_{n\geq 1}(f_n - f_{n-1})$ dacă :
a $f_n : [0, 1] \mapsto R$; $f_n(x) = nx(1-x)^n, \forall n \in N$.
b. $f_n : (0, 1] \mapsto R$, $f_n(x) = \dfrac{e^{nx}}{1+e^{nx}}, \forall n \in N$.
Soluţie
a. Calculăm şirul sumelor parţiale

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(f_k(x) - f_{k-1}(x)) = f_n(x) - f_0(x) = f_n(x), \forall x \in [0, 1].$$

Folosind exerciţiul **2** din acest capitol rezultă că seria este simplu convergentă (la 0) dar nu este uniform convergentă.
b. Calculăm şirul sumelor parţiale:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(f_k(x) - f_{k-1}(x)) = f_n(x) - f_0(x) = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}} - \frac{1}{2}.$$

Rezultă că seria converge punctual la funcţia $S(x) = \dfrac{1}{2}$. Din evaluarea:

$$\sup_{x\in(0,1]}\left|S_n(x) - \frac{1}{2}\right| = \sup_{x\in(0,1]}\left|\frac{e^{nx}}{1+e^{nx}} - 1\right| = \sup_{x\in(0,1]}\frac{1}{1+e^{nx}} = \frac{1}{2},$$

rezultă că seria nu este uniform convergentă .

27. Fie $D_1 = \{z \in C \mid |z| = 1\}$ cercul unitate şi fie $\mathcal{C}(D_1)$ spaţiul Banach al funcţiilor continue pe D_1 cu norma supremum. Fie, de asemenea, $\ell^1(Z)$ spaţiul Banach al şirurilor absolut sumabile cu norma $\| \ \|_1$, (a se vedea secţiunea teoretică a capitolului 2).
a. Să se demonstreze că pentru orice $z \in D_1$ şi pentru orice şir $x \in \ell^1(Z)$, seria (de numere complexe) $\sum_{n\in Z} x(n)z^{-n}$ este absolut convergentă.
b. Pentru orice $x \in \ell^1(Z)$, notăm cu $\mathcal{Z}x$ funcţia (corect definită, datorită punctului a):

$$\mathcal{Z}x : D_1 \mapsto C, \ (\mathcal{Z}x)(z) = \sum_{n\in Z} x(n)z^{-n}.$$

Funcţia $\mathcal{Z}x$ se numeşte transformata $\mathcal{Z}$ ("zet") a şirului x. Să se demonstreze că $\mathcal{Z}x$ este funcţie continuă.
c. Să se demonstreze că aplicaţia

$$\mathcal{Z} : \ell^1(Z) \mapsto \mathcal{C}(D_1), \ (\mathcal{Z}x)(z) = \sum_{n\in Z} x(n)z^{-n}$$

este liniară şi continuă.
d. Să se demonstreze că pentru orice şiruri $x, y \in \ell^1(Z)$ are loc egalitatea:

$$\mathcal{Z}(x \star y) = (\mathcal{Z}x)\,(\mathcal{Z}y),$$

unde, $x \star y$ este convoluţia şirurilor x şi y, (cf. exerciţiului 55, cap. 2).
e. Fie $\theta \in \ell^1(Z)$ un şir fixat şi fie $M_{\mathcal{Z}\theta}$ operatorul de înmulţire cu funcţia $\mathcal{Z}\theta$ (a se veda exerciţiului 53 din capitolul 2):

$$M_{\mathcal{Z}\theta} : \mathcal{C}(D_1) \mapsto \mathcal{C}(D_1), \ M_{\mathcal{Z}\theta} f = (\mathcal{Z}\theta) f.$$

Fie, de asemenea, operatorul de convoluţie cu θ (a se vedea exerciţiul 55 din capitolul 2):

$$C_\theta : \ell^1(Z) \mapsto \ell^1(Z), \ C_\theta x = \theta \star x.$$

Să se demonstreze relaţia:

$$\mathcal{Z}\, C_\theta x = M_{\mathcal{Z}\theta}\, \mathcal{Z}x, \ \forall\, x \in \ell^1(Z).$$

Soluţie
a. Fie $z \in D_1$ şi fie $x \in \ell^1(Z)$; atunci:

$$\sum_{n\in Z} |x(n)z^{-n}| \ \leq \ \sum_{n\in Z} |x(n)| = \| \ x \ \|_1 < \ \infty.$$

b. Fie $x \in \ell^1(Z)$; pentru a demonstra că funcţia $\mathcal{Z}x$ este continuă pe D_1 este suficient să demonstrăm că seria $\sum_{n\in Z} x(n)z^{-n}$ este uniform convergentă pe D_1. Pentru aceasta aplicăm criteriul lui Weierstrass:

$$\sum_{n\in Z} |x(n)z^{-n}| \leq \sum_{n\in Z} |x(n)|,$$

ultima serie fiind o serie numerică absolut convergentă.
c. Liniaritatea o propunem ca exerciţiu; pentru orice $x \in \ell^1(Z)$, avem:

$$\| \mathcal{Z}x \|_\infty = \sup_{z\in D_1} |(\mathcal{Z}x)(z)| = \sup_{z\in D_1} \left| \sum_{n\in Z} x(n)z^{-n} \right| \leq$$

$$\leq \sup_{z\in D_1} \sum_{n\in Z} |x(n)|\, |z^{-n}| = \| x \|_1,$$

ceea ce arată că $\mathcal{Z}$ este operator continuu.
d. Fie $x, y \in \ell^1(Z)$ şi $z \in D_1$; atunci:

$$(\mathcal{Z}(x \star y))(z) = \sum_{n\in Z} (x \star y)(n)\, z^{-n} = \sum_{n\in Z} \left(\sum_{k\in Z} x(n-k)y(k) \right) z^{-n} =$$

$$= \sum_{k\in Z} \left(y(k) \sum_{n\in Z} x(n-k)\, z^{-n} \right) = \sum_{k\in Z} \left(y(k) \sum_{m\in Z} x(m)\, z^{-k-m} \right) =$$

$$= \left(\sum_{m\in Z} x(m)z^{-m} \right) \left(\sum_{k\in Z} y(k)z^{-k} \right) = (\mathcal{Z}x)\,(\mathcal{Z}y),$$

comutarea seriilor (în n şi k) fiind permisă datorită faptului că ambele sunt absolut convergente.
e. Fie $\theta \in \ell^1(Z)$; atunci, pentru orice $x \in \ell^1(Z)$, aplicând punctul d, rezultă:

$$\mathcal{Z}C_\theta x = \mathcal{Z}(\theta \star x) = (\mathcal{Z}\theta)\,(\mathcal{Z}x) = M_{\mathcal{Z}\theta}\mathcal{Z}x,$$

ceea ce încheie demonstraţia.

3.3 Formula lui Taylor. Serii Taylor

Să se dezvolte în serie Mc Laurin următoarele funcţii precizându-se domeniul de convergenţă (exerciţiile 28-41):

28. $f(x) = e^x$

Soluţie

Calculăm derivatele funcţiei şi obţinem : $(e^x)^{(n)} = e^x, \forall n \in N$. Rezultă

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n.$$

Pentru determinarea domeniului de convergenţă folosim criteriul raportului

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1,$$

seria este convergentă pe R .

Restul de ordin n este : $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\xi}$, $\xi \in (0, x)$ sau $\xi \in (x, 0)$.

29. $f(x) = \mathrm{ch}x$

Soluţie

Din relaţiile: $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$ şi $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$ rezultă

$$(\mathrm{ch})^{(2n)}(0) = \mathrm{ch}(0) = 1 \text{ şi } (\mathrm{ch})^{(2n+1)} = \mathrm{sh}(0) = 0.$$

Rezultă seria

$$\mathrm{ch}x = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \forall x \in R.$$

30. $f(x) = \mathrm{sh}x$

Soluţie

Procedând ca mai sus, obţinem:

$$\mathrm{sh}x = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \forall x \in R.$$

31. $f(x) = \sin x$

Soluţie

Calculăm derivata de ordin n a funcţiei sinus:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall\, n \in N,$$

şi deci $\sin^{(2n)}(0) = 0$ şi $\sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. Rezultă

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}.$$

Pentru determinarea domeniului de convergenţă folosim criteriul raportului

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1,$$

deci seria este convergentă pe R .

32. $f(x) = \cos x$

Soluţie

Derivata de ordin n a funcţiei cosinus este:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

şi deci

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}.$$

Seria este convergentă pe R.

33. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in R$

Soluţie

Fie $\alpha \in R$; derivata de ordinul n a funcţiei $x \mapsto (1+x)^\alpha$ este:

$$((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n},\ \forall\, n \in N.$$

Rezultă că derivata de ordin n în zero este $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))$ şi deci (seria binomială):

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Domeniul de convergenţă al seriei este $|x| < 1$.

34. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

Soluţie

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n, \forall\, x \in (-1,1).$$

35. $f(x) = \sqrt{1+x}$.

Soluţie

Caz particular al seriei binomiale: $\alpha = \frac{1}{2}$; rezultă:

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n-1}\, 1\cdot 3\cdot 5...(2n-3)}{2^n} x^n, \forall\, |x| < 1.$$

36. $f(x) = \ln(1+x)$; să se calculeze apoi suma seriei

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Soluţie

Derivata de ordin n a funcţiei $x \mapsto \ln(1+x)$ este:

$$(\ln(1+x))^{(n)} = \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \forall\, n \in N.$$

Rezultă seria:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n,$$

care este convergentă pe $(-1,1]$. În particular, se obţine:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

37. $f(x) = \text{arctg}x$; să se calculeze apoi suma seriei

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Soluţie

Dezvoltăm în serie derivata funcţiei:

$$(\text{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}, \forall\, |x| < 1.$$

Integrând termen cu termen, rezultă (convergenţa în punctele ± 1 rezultă aplicând criteriul lui Leibniz):

$$\text{arctg}x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \forall\, x \in [-1,1].$$

În particular, se obţine (seria Leibniz-Gregory):

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

38. $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

Soluţie

Aplicând dezvoltarea funcţiei sinus şi integrând termen cu termen, rezultă:

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$$

Seria este convergentă pe R .

39. $f(x) = \sin^2 x$

Soluţie

Liniarizând şi aplicând dezvoltarea funcţiei cosinus, se obţine:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot x^{2n}.$$

Seria este convergentă pe R.

40. $f(x) = \dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$

Soluţie

Descompunem funcţia în fracţii simple :

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n.$$

Prima serie este convergentă pe $(-1,1)$ iar a doua pe $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Rezultă:

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^n 2^{n+1}) x^n, \forall\, |x| < \frac{1}{2}.$$

41. $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$

Soluţie

Descompunem funcţia în fracţii simple :

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \forall |x| < 1,$$

unde $c_n = 1$ dacă $n = 4k$, $c_n = -1$ dacă $n = 4k+1$ şi $c_n = 0$ în rest.

42. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui $x-1$ funcţia

$$f : R \setminus \{0\} \mapsto R,\ f(x) = \frac{1}{x}.$$

Soluţie

Derivata de ordin n este:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},\ \text{deci}\ f^{(n)}(1) = (-1)^n n!,\ \forall n \in N.$$

Rezultă

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x-1)^n, \forall x \in (0,2).$$

43. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui $x+4$ funcţia

$$f : R \setminus \{-2,-1\} \mapsto R,\ f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}.$$

Soluţie

Se descompune funcţia în fracţii simple şi apoi se procedează ca la exerciţiul anterior (se calculează derivata de ordin n în $x = -4$):

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n,\ \forall\, x \in (-6,-2).$$

O altă metodă este de a aplica direct dezvoltarea funcţiei $\frac{1}{1+x}$ translatată în $x=-4$:

$$f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{-3\left(1-\frac{x+4}{3}\right)}-\frac{1}{-2\left(1-\frac{x+4}{2}\right)}=$$

$$=-\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^{n+1}}(x+4)^n+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^{n+1}}(x+4)^n, \forall\, |x+4|<2.$$

44. Să se determine aproximările liniare şi pătratice ale următoarelor funcţii în jurul punctelor indicate:
a. $f(x)=x\ln x$ în jurul punctului $a=1$.
b. $f(x)=\sqrt[3]{x+1}\,\sin x$ în jurul punctului $a=0$.
Soluţie
a. Aproximările cerute sunt polinoamele Taylor de gradul 1 şi respectiv 2. Se calculează $f(1)=0,\ f'(1)=1,\ f''(1)=1$. Rezultă:
$T_1(x)=f(1)+f'(1)(x-1)=x-1$.
$T_2(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2=(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2$.
b. Analog, se obţine $T_1(x)=1+x$ şi $T_2(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2$.

45. Să se demonstreze că există funcţii $f\in\mathcal{C}^\infty(R)$ care nu se pot dezvolta în serie Taylor.
Soluţie
Un exemplu uzual este funcţia

$$f:R\mapsto R,\ f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dacă} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{dacă} \quad x=0\end{cases}$$

Atunci $f\in\mathcal{C}^\infty(R)$ şi în plus funcţia f şi toate derivatele ei în 0 sunt nule: $f^{(n)}(0)=0,\ \forall\, n\in N$. Dacă funcţia s-ar putea dezvolta în serie Mc Laurin într-o vecinătate $\mathcal{V}$ a originii, atunci

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+....=0,\ \forall\, x\in\mathcal{V},$$

contradicţie: evident, funcţia f nu se anulează în alte puncte în afara originii.

46. Folosind dezvoltări limitate să se calculeze următoarele limite:
a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)-\sin 2x+2x^2}{x^3}$

Soluţie

a. Considerăm funcţiile $f(x)=1-\cos x^2$ şi $g(x)=\sin x^2$ pe care le dezvoltăm in jurul lui 0. Obţinem:

$$f'(x)=2x\sin x^2\Rightarrow f'(0)=0$$
$$f''(x)=2\sin x^2+4x^2\cos x^2\Rightarrow f''(0)=0$$
$$f'''(x)=12x\cos x^2-8x^3\sin x^2\Rightarrow f'''(0)=0$$
$$f^{(4)}(x)=12\cos x^2-48x^2\sin x^2-16x^4\cos x^2\Rightarrow f^{(4)}(0)=12$$
$$g'(x)=2x\cos x^2\Rightarrow g'(0)=0$$
$$g''(x)=2\cos x^2-4x^2\sin x^2\Rightarrow g''(0)=2$$

Notăm $0(x^k)$ orice expresie care verifică egalitatea $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0(x^k)}{x^k}=0$. Rezultă

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{12x^4}{4!}+0(x^4)}{\frac{2x^4}{2!}+0(x^4)}=\frac{1}{2}.$$

O altă metodă constă în a aplica direct dezvoltările funcţiilor sinus şi cosinus (până la gradul al treilea).

b. Considerăm funcţia $f(x)=\ln(1+2x)-\sin 2x+2x^2$ pe care o dezvoltăm in jurul lui 0; pentru aceasta, putem calcula derivatele până la ordinul al treilea ale funcţiei f (ca mai sus) sau putem aplica dezvoltările funcţiilor logaritm şi sinus:

$$f(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}x^n-\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n2^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+2x^2.$$

Rezultă:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-\sin 2x+2x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{16x^3}{3!}+0(x^3)}{x^3}=\frac{8}{3}.$$

47. Să se calculeze limita: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{2x(e^x-1)}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

Soluţie

Scriem mai întâi limita sub forma:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{2x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x-2e^x+2}{2x^2(e^x-1)}.$$

Considerăm funcţiile $f(x) = x^2 + 2x - 2e^x + 2$ şi $g(x) = e^x - 1$ pe care le dezvoltăm in jurul lui 0. Procedăm ca în exerciţiul precedent şi obţinem :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{2x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3} + 0(x^3)}{2x^3 + 0(x^3)} = -\frac{1}{6}.$$

Să se calculeze cu o eroare mai mică decât 10^{-3} integralele (exerciţiile 48-51):

48. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx.$

Soluţie

Se dezvoltă integrantul în serie de puteri în jurul lui 0, se integrează termen cu termen şi se aproximează seria alternată rezultată:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)2^{2n+1}}.$$

49. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$

Soluţie

Se procedează analog; rezultă:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 2^n}.$$

50. $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\operatorname{arctg}}{x} dx.$

Soluţie

Analog, se obţine:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\operatorname{arctg}}{x}\, dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 3^{2n+1}}.$$

51. $\int_0^1 e^{-x^2} dx.$

Soluţie

Analog, rezultă:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

3.4 Serii de puteri, funcţii elementare

Să se calculeze raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă în R pentru următoarele serii de puteri (exerciţiile 52-62):

52. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Soluţie

Fie R raza de convergenţă: $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$. Deci seria este absolut convergentă pe $(-1,1)$ şi divergentă pe $(-\infty,-1)\bigcup(1,\infty)$. Evident, seria este uniform convergentă pe orice interval închis $|x| \leq r < 1$. Dacă $x \in \{-1,1\}$ se obţine o serie divergentă.

53. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

Soluţie

Fie R raza de convergenţă: $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$. Deci seria este absolut convergentă pe $(-1,1)$ şi divergentă pe $(-\infty,-1)\bigcup(1,\infty)$. Evident, seria este uniform convergentă pe orice interval închis $|x| \leq r < 1$. Dacă $x \in \{-1,1\}$ se obţine o serie divergentă.

54. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

Soluţie

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$. Deci seria este absolut convergentă pe $(-1,1)$, divergentă pe $(-\infty,-1)\bigcup(1,\infty)$ şi uniform convergentă pe $|x| \leq r < 1$. Dacă $x = -1$ se obţine seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ care este divergentă, iar pentru $x = 1$ se obţine seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ care este o serie convergentă.

55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!}$

Soluţie
$R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n(n+1)!}{n!(n+1)^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \dfrac{1}{e}.$
Seria este absolut convergentă pe $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ şi divergentă pe $(-\infty, -\frac{1}{e}) \bigcup (\frac{1}{e}, \infty)$. Seria este uniform convergentă pe $|x| \leq r < e$. Dacă $x \in \left\{-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right\}$ se obţine o serie divergentă (criteriul raportului).

56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^p}$, $p \in R$

Soluţie
$R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$. Seria este absolut convergentă pentru $x \in (-1, 1)$, divergentă pentru $x \in (-\infty, -1) \bigcup (1, \infty)$ şi uniform convergentă pe $|x| \leq r < 1$. Dacă $x = -1$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^p}$ care este divergentă pentru $p \leq 0$ şi convergentă pentru $p > 0$, iar pentru $x = 1$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ care este divergentă pentru $p \leq 1$ şi convergentă pentru $p > 1$. Prin urmare mulţimea de convergenţă este:
$[-1, 1]$ dacă $p > 1$,
$[-1, 1)$ dacă $p \in (0, 1]$ şi
$(-1, 1)$ dacă $p \leq 0$.

57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+2}{n+2}} x^n$

Soluţie
$R = 1$. Seria este absolut convergentă pe $(-1, 1)$, divergentă pe $(-\infty, -1) \bigcup (1, \infty)$ şi uniform convergentă pe $|x| \leq r < 1$. Dacă $x \in \{-1, 1\}$ se obţine o serie divergentă (se aplică criteriul necesar).

58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)} x^n$, $a > 0$

Soluţie
Raza de convergenţă este $R = 1$. Seria este absolut convergentă pe $(-1, 1)$, divergentă pe $(-\infty, -1) \bigcup (1, \infty)$ şi uniform convergentă pe $|x| \leq r < 1$. Dacă $x = 1$ obţinem seria

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)}.$$

Cu criteriul Raabe-Duhamel obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=a.$$

Seria este divergentă pentru $a<1$ şi convergentă pentru $a>1$; dacă $a=1$ seria este seria armonică (divergentă). Dacă $x=-1$ se obţine o serie convergentă (cu criteriul lui Leibniz).

59. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$

Soluţie

Raza de convergenţă este $R=3$. Seria este absolut convergentă pe $(-2,4)$, divergentă pe $(-\infty,-2)\bigcup(4,\infty)$ şi uniform convergentă pe $|x-1|\le r<3$. Dacă $x\in\{-2,4\}$ se obţine seria armonică.

60. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$

Soluţie

Raza de convergenţă este $R=1$. Seria este absolut convergentă pe $(-4,-2)$, divergentă pe $(-\infty,-4)\bigcup(-2,\infty)$ şi uniform convergentă pe $|x+3|\le r<1$. Dacă $x\in\{-4,-2\}$ se obţin seriile $\displaystyle\sum_{n\ge1}\frac{(\pm1)^n}{n^2}$ care sunt absolut convergente.

61. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-2)^{2n}$

Soluţie

$R=1$. Seria este absolut convergentă pentru $(x-2)^2<1$, adică $x\in(1,3)$; seria este divergentă pentru $x\in(-\infty,1)\bigcup(3,\infty)$ şi uniform convergentă pe $(x-2)^2\le r<1$. Dacă $x\in\{1,3\}$ se obţine seria $\displaystyle\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ care este convergentă.

62. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}}(x-1)^n$

Soluţie

$R=\frac{9}{4}$. Seria este absolut convergentă pentru $|x-1|<\frac{9}{4}$, adică $x\in\left(-\frac{5}{4},\frac{13}{4}\right)$; seria este divergentă pentru $x\in\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right)\bigcup\left(\frac{13}{4},\infty\right)$; seria este uniform convergentă pe $|x-1|\le r<\frac{9}{4}$. Dacă $x=-\frac{5}{4}$ se obţine seria $-\displaystyle\sum_{n\ge1}\left(\frac{9}{4}\right)^n\frac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}}$ care este divergentă (criteriul necesar), iar dacă

$x = \frac{13}{4}$ se obţine seria $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\left(\frac{9}{4}\right)^n \frac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}}$ care este divergentă.

În exerciţiile 63-68, să se studieze convergenţa următoarelor serii de funcţii

63. $\sum_{n=0}^{\infty} \ln^n x,\ x > 0$

Soluţie

Cu schimbarea de variabilă $t = \ln x$ se obţine o serie de puteri cu raza de convergenţă $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$. Seria de puteri este absolut convergentă pentru $t \in (-1,1)$ şi divergentă pentru $t \in (-\infty,-1)\bigcup(1,\infty)$. Rezultă că seria iniţială este convergentă dacă şi numai dacă $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$. Evident, seria este uniform convergentă pe $[e^{-r}, e^r], \forall r < 1$.

64. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$

Soluţie

Cu schimbarea de variabilă $t = e^{-x} > 0$ se obţine o serie de puteri având raza de convergenţă $R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = e$. Seria este absolut convergentă pentru $t \in (0,e)$, deci pentru $x > -1$ şi divergentă pentru $t \in (e,\infty)$, adică $x < -1$. Evident seria este uniform convergentă pe $x \geq r$,$\forall r > -1$. Dacă $x = -1$ se obţine o serie divergentă (se poate aplica criteriul necesar):

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} e\right)^n \geq 1.$$

65. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!x^n}$

Soluţie

Fie $y = x^{-1}$; seria de puteri $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} y^n$ are raza de convergenţă $R = \infty$, deci seria iniţială converge pentru orice $x \neq 0$.

66. $\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1} e^{-n\sin x}$

Soluţie

Fie $y = e^{-\sin x}$; seria de puteri $\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1} y^n$ are raza de convergenţă $R = 1$

şi converge dacă şi numai dacă $y \in (-1,1)$. Rezultă că seria iniţială converge dacă şi numai dacă $\sin x > 0$, adică

$$x \in \bigcup_{k \in Z} (2k\pi, (2k+1)\pi).$$

67. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \sin^n x$

Soluţie

Fie $y = \sin x$; seria $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} y^n$ converge dacă şi numai dacă $y \in (-1,1]$, deci seria iniţială converge dacă şi numai dacă $x \neq (4k-1)\frac{\pi}{2}$, $\forall k \in Z$.

68. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{x}{\ln x}\right)^n$, $x > 0$

Soluţie

Fie $y = \dfrac{x}{\ln x}$; seria converge dacă şi numai dacă $|y| < 1$, sau echivalent, $x < |\ln x|$. Fie $\xi \in (0,1)$ soluţia unică a ecuaţiei $x = -\ln x$. Seria converge dacă şi numai dacă $x \in (0, \xi)$.

Să se găsească raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă în C pentru următoarele serii de puteri (exerciţiile 69-73):

69. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^p}$, $z \in C$

Soluţie

Raza de convergenţă este 1. Seria este absolut convergentă pentru orice $|z| < 1$ şi divergentă pentru $|z| > 1$. Cazurile $z = \pm 1$ au fost studiate în exerciţiul 11. Fie $z = e^{it}, t \neq k\pi, k \in Z$. Dacă $p \leq 0$, seria este divergentă (criteriul necesar); dacă $p > 1$, seria este absolut convergentă. Dacă $p \in (0,1]$, seria este convergentă (părţile reală şi imaginară sunt convergente - se aplică criteriul Abel-Dirichlet).

70. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n$, $z \in C$

Soluţie

$R = 1$, deci discul de absolut convergenţă al seriei este $|z| < 1$. Dacă $|z| = 1$ şirul termenilor seriei nu tinde la 0 deci seria este divergentă .

71. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1+ni) z^n$,$z \in C$

Soluţie
$R = 1$, deci discul de absolut convergenţă al seriei este $|z| < 1$. Dacă $|z| = 1$ şirul termenilor seriei nu tinde la 0, deci seria este divergentă.

72. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n \cdot 3^n}$, $z \in C$

Soluţie
$R = 3$, deci discul de absolut convergenţă este $|z-2i| < 3$. Dacă $|z-2i| = 3$, deci $z - 2i = 3e^{i\theta}$ se obţine seria $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ care a fost studiată în capitolul 1, exerciţiul 42.

73. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$, $z \in C$

Soluţie
$R = 1$, deci discul de absolut convergenţă al seriei este $|z| < 1$. Dacă $|z| = 1, z = e^{i\theta}$ se obţine seria $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{e^{in\theta}}{n}$. Dacă $z = -1$, seria este divergentă (seria armonică); pentru $z \neq -1$ seria este convergentă (criteriul Abel-Dirichlet).

Să se calculeze sumele seriilor de funcţii (exerciţiile 74-80) :

74. $\sum_{n\geq 0} x^{2n}$

Soluţie
$\sum_{n\geq 0} x^{2n} = \sum_{n\geq 0} (x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}, \forall\, |x| < 1..$

75. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Soluţie
Raza de convergenţă este 1. Fie $S(x)$ suma seriei date. Seria derivatelor are aceeasi rază de convergenţă cu seria iniţială şi suma ei este egală cu derivata sumei. Calculăm:

$$S'(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n (x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}, \forall\, |x| < 1.$$

Rezultă $S(x) = \text{arctg}x + C$. Din $S(0) = 0$, rezultă $C = 0$.

76. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

Soluţie

Fie $S(x)$ suma seriei. Seria primitivelor are aceeasi rază de convergenţă cu seria iniţială ($R=1$) şi suma ei este egală cu o primitivă a sumei seriei date. Integrând seria termen cu termen se obţine:

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n\geq 0} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}, \forall\, |x|<1.$$

Rezultă $S(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

77. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$

Soluţie

Seria converge pentru $x \in (-2,2)$ şi fie $S(x)$ suma seriei. Dacă $x=0$, atunci $S(0)=0$; fie $x \in (-2,2)\setminus\{0\}$;

$$S(x) = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{2}\right)^n - \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{2}{2-x} - \frac{2}{x}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}.$$

Suma ultimei serii (pe care o notăm cu $T(x)$) se calculează prin derivare

$$T'(x) = \left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}\right)' = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2-x}.$$

Rezultă:

$$T(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} = C - \ln(2-x).$$

Din $T(0)=0$ rezultă $C = \ln 2$. În concluzie rezultă:

$$S(x) = \frac{2}{2-x} - \frac{2}{x}\ln\frac{2}{2-x},\ \forall x \in (-2,2), x\neq 0 \text{ şi } S(0)=0.$$

78. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^3}{n(n+2)}x^{n-1}$

Soluţie

Seria este absolut convergentă pentru $x \in (-1,1)$. Dacă $x = 0$ suma este $\frac{8}{3}$; fie $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$. Coeficientul $\dfrac{(n+1)^3}{n(n+2)}$ se descompune în fracţii simple:

$$\frac{(n+1)^3}{n(n+2)} = n + 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+2)}.$$

Rezultă (pentru $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n(n+2)} x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} n x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n} x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2(n+2)} x^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{1-x} + \sum_{n\geq 1} (x^n)' + \frac{1}{2x} \sum_{n\geq 1} \int_0^x x^{n-1} dx + \frac{1}{2x^3} \sum_{n\geq 1} \int_0^x x^{n+1} dx =$$

$$= \frac{1}{1-x} + \left(\sum_{n\geq 1} x^n \right)' + \frac{1}{2x} \int_0^x \left(\sum_{n\geq 1} x^{n-1} \right) dx + \frac{1}{2x^3} \int_0^x \left(\sum_{n\geq 1} x^{n+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{1-x} + \left(\frac{x}{1-x} \right)' + \frac{1}{2x} \int_0^x \left(\frac{1}{1-x} \right) dx + \frac{1}{2x^3} \int_0^x \left(\frac{x^2}{1-x} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{2x} \ln \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2x^3} \left(-x - \frac{x^2}{2} + \ln \frac{1}{1-x} \right).$$

79. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n x^{-n}$

Soluţie

Se face substituţia $y = x^{-1}, x \neq 0$. Suma seriei (de puteri) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n y^n$ se calculează prin derivarea seriei $\displaystyle\sum_{n\geq 1} y^n$ şi apoi înmulţire cu y; rezultă:

$$\sum_{n\geq 1} n y^n = \frac{y}{(1-y)^2}, \forall\, y \in (-1,1).$$

Rezultă:

$$\sum_{n\geq 0} n x^{-n} = \frac{x}{(x-1)^2}, \forall\, x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty).$$

80. $\sum_{n\geq 1}(4n-3)x^{-(4n-3)}$

Soluţie
Se procedează analog cu exerciţiul precedent.

81. Să se dezvolte în serie de puteri centrate în zero funcţia $f(x)=\arcsin x$ şi apoi să se demonstreze

$$1+\sum_{n\geq 1}\frac{1\cdot 3\cdot 5...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6...(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}.$$

Soluţie
Dezvoltăm în serie derivata funcţiei arcsin (folosim seria binomială petru exponentul $\alpha=-\frac{1}{2}$):

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n\geq 1}\frac{1\cdot 3\cdot 5...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6...(2n)}x^{2n},\forall\,|x|<1.$$

Integrând termen cu termen (de la 0 la x), obţinem:

$$\arcsin x=x+\sum_{n\geq 1}\frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6...(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+1},\forall\,x\in[-1,1].$$

Convergenţa în punctele ± 1 se stabileşte cu criteriul lui Leibniz.
Suma seriei numerice din enunţ este $\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$.

82. Să se dezvolte în serie de puteri centrate în zero funcţia $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ şi apoi să se demonstreze:

$$1+\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6...(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1}=\ln(1+\sqrt{2}).$$

Soluţie
Procedăm analog cu exerciţiul anterior:

$$\left(\ln(x+\sqrt{1+x^2}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=1+\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6...(2n)}\cdot x^{2n},\,\forall\,|x|<1.$$

Rezultă dezvoltarea:

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=$$

$$= x + \sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6...(2n)} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot x^{2n+1}, \forall\, x \in [-1,1].$$

În particular pentru $x = 1$ obţinem suma seriei date: $\ln(1+\sqrt{2})$.

Folosind serii de puteri să se calculeze sumele următoarelor serii de numere (exerciţiile 83-90):

83. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Soluţie

Suma este $\ln 2$.

84. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Soluţie

Suma este $\text{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$.

85. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!}$

Soluţie

Suma este $e^{-\frac{1}{4}}$.

86. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$

Soluţie

Suma este $\sqrt{3}\,\text{arctg}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

87. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$

Soluţie

Fie dezvoltarea:

$$\text{arctg}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1} \forall x \in (-1,1).$$

Primitiva care se anulează în 0 este:

$$\int_0^x \text{arctg} x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n+2}.$$

Calculând (prin părţi) integrala, rezultă:

$$x\text{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n+2},$$

deci suma cerută este $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.

88. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n}$

Soluţie

Raza de convergenţă a seriei $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ este 1 şi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right)' =$$

$$= \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \forall\, x \in (-1,1).$$

În particular, pentru $x = \frac{1}{4}$ rezultă $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n} = \frac{16}{9}$.

89. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

Soluţie

Din dezvoltarea funcţiei arctg:

$$\text{arctg}x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},\ \forall\, x \in [-1,1],$$

rezultă

$$\int_0^1 \frac{\text{arctg}x}{x} dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Valoarea acestei integrale (constanta lui Catalan) este aproximativ $0,91596$.

90. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

Soluţie

Seria de puteri $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$ converge pentru orice $x \in (-1,1]$; integrând

termen cu termen, se obţine:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\lim_{x\to 1}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\int_0^x\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{3n}dx=\lim_{x\to 1}\int_0^x\frac{dx}{1+x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}\right)=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Capitolul 4

Funcţii diferenţiabile

4.1 Noţiuni teoretice

Derivate parţiale, diferenţială
Fie D o submulţime deschisă în R^n şi fie $f : D \mapsto R$. Fie $a \in D$ şi $s \in R^n$ un versor arbitrar. Se spune că f este derivabilă în punctul a după direcţia s dacă există în R limita:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+ts) - f(a)}{t}.$$

Dacă există, această limită se notează $\frac{df}{ds}(a)$ şi se numeşte derivata lui f după s în punctul a. Se spune că f are derivată parţială în punctul a în raport cu variabila x_k dacă există $\frac{df}{de_k}(a)$, care în acest caz se notează $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$. Funcţia f se zice derivabilă parţial pe D dacă pentru orice $a \in D$ şi pentru orice $k \in \{1, 2, .., n\}$ există $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$. Funcţiile

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \mapsto R$$

se numesc derivatele parţiale ale lui f. Funcţia f se zice de clasă C^1 pe D (se notează $f \in C^1(D)$) dacă toate derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ există şi sunt funcţii continue pe D.

Presupunem că $f \in C^1(D)$; pentru orice $a \in D$, vectorul

$$\text{grad}_a f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

se numeşte gradientul lui f în punctul a. Are loc formula:

$$\frac{df}{ds}(a) = s \cdot \text{grad}_a f, \forall\, s \in R^n.$$

Fie $F : D \mapsto R^m$, $F = (f_1, f_2, .., f_m)$. Presupunând că există toate derivatele parţiale $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$, se poate defini matricea jacobiană a aplicaţiei F în punctul a prin:

$$J_F(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}.$$

Dacă $m = n$, atunci matricea este pătratică şi determinantul ei se numeşte jacobianul funcţiilor $f_1, f_2, .., f_n$ în punctul a şi se notează

$$\det\left(J_F(a)\right) = \frac{D(f_1, f_2, .., f_n)}{D(x_1, x_2, .., x_n)}.$$

Funcţia F se numeşte de clasă C^1 pe mulţimea D dacă toate componentele sale, $f_1, .., f_m$ sunt de clasă C^1.

Diferenţiala

Aplicaţia $F : D \mapsto R^m$ se numeşte diferenţiabilă în punctul $a \in D$ dacă există o aplicaţie liniară $DF(a) : R^n \mapsto R^m$ astfel încât

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x) - F(a) - DF(a)(x - a)}{\parallel x - a \parallel} = 0.$$

Dacă există, aplicaţia $DF(a)$ se numeşte diferenţiala lui F în punctul a.

Legătura dintre derivate parţiale şi diferenţială

i. Dacă F este diferenţiabilă în punctul a atunci F este derivabilă parţial în a. În acest caz, matricea (în baza canonică) a aplicaţiei liniare $DF(a)$ este matricea jacobiană a lui F în a, deci

$$DF(a)x = J_F(a)x^T, \forall x \in R^n.$$

Dacă $f : D \mapsto R$ este diferenţiabilă în $a \in D$, atunci

$$Df(a) : R^n \mapsto R,$$

$$Df(a)(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)x_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)x_n,$$

sau, notând cu dx_j proiecţia pe componenta j, diferenţiala se scrie sub forma:

$$Df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n.$$

ii. Dacă $F \in C^1(D)$ atunci F este diferenţiabilă în orice $a \in D$.

Diferenţiala funcţiei compuse

Fie $A \subseteq R^n$ şi $B \subseteq R^m$ două mulţimi deschise şi fie $F : A \mapsto B$, $G : B \mapsto R^k$. Dacă F este diferenţiabilă în $a \in A$ şi G este diferenţiabilă în $b = F(a) \in B$ atunci compunerea $G \circ F$ este diferenţiabilă în a şi

$$D(G \circ F)(a) = DG(b) \circ DF(a).$$

Relaţia dintre matricele jacobiene asociate este

$$J_{G\circ F}(a) = J_G(b)J_F(a).$$

Derivate parţiale de ordin superior

Funcţia $f : D \mapsto R$ se numeşte de clasă C^2 pe D dacă $f \in C^1(D)$ şi $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in C^1(D), \forall k \in \{1, 2, .., n\}$. Funcţiile $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ se numesc derivatele parţiale de ordinul al doilea şi se notează $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$. În cazul particular $j = k$, se foloseşte notaţia $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$.

Teorema de simetrie a lui Schwartz

Dacă $f \in C^2(D)$, atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a), \forall j, k \in \{1, 2, .., n\},\ \forall a \in D.$$

Diferenţiala a doua

Fie $f \in C^2(D)$ şi $a \in D$. Matricea hessiană a lui f în a este matricea (simetrică)

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1\le i,j\le n}.$$

Diferenţiala a doua a funcţiei f în punctul a este forma pătratică

$$D^2 f(a) : R^n \mapsto R,\ D^2 f(a)(h_1, h_2, .., h_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j.$$

Polinomul Taylor

Fie D o submulţime deschisă din R^n, fie $f : D \mapsto R$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^m$ şi fie $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in D$. Notăm

$$\Delta f(a) = Df(a)(x - a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k).$$

Puterea simbolică $[\Delta f(a)]^{(k)}$ se defineşte ca fiind puterea k a polinomului $\Delta f(a)$ cu convenţiile

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right)^{p_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right)^{p_2}...\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)^{p_n}=\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}...\partial x_n^{p_n}}(a),$$

$\forall\, p_1, p_2, ...p_n \in \{0, 1, ..., k\}$ astfel încât $p_1 + p_2 + ...p_n = k$.
Polinomul Taylor de gradul m asociat funcţiei f în punctul a este, prin definiţie:

$$T_m(f,a)(x)=f(a)+\frac{1}{1!}\Delta f(a)+\frac{1}{2!}[\Delta f(a)]^{(2)}+...+\frac{1}{m!}[\Delta f(a)]^{(m)},\ \forall x\in D,$$

iar restul de ordin m este $R_m(f,a)(x) = f(x) - T_m(f,a)(x)$.
De exemplu, dacă $n = 2$, $(a_1, a_2) = (a, b)$, atunci:

$$T_1(f,(a,b))(x,y)=f(a,b)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b),$$

$$T_2(f,(a,b))(x,y)=f(a,b)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left((x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)+2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)+(y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right).$$

În general, pentru $m \in N$:

$$T_m(f,(a,b))(x,y)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}[\Delta f(a,b)]^{(k)},$$

unde

$$[\Delta f(a,b)]^{(k)}=\sum_{i=0}^{k}C_k^i(x-a)^{k-i}(y-b)^i\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i}\partial y^i}(a,b).$$

Polinoamele $T_1(f,a)$ şi $T_2(f,a)$ se numesc aproximarea liniară şi, respectiv, aproximarea pătratică a funcţiei f în jurul punctului a.
Formula lui Taylor
În condiţiile de mai sus, fie $r > 0$ astfel încât $B(a,r) \subseteq D$. Atunci, pentru orice $x \in B(a,r)$, există $\xi \in [a,x]$ astfel încât

$$f(x)=T_m(f,a)+\frac{1}{m!}[\Delta f(\xi)]^{(m)}.$$

În particular, rezultă că

$$\lim_{x\to a}\frac{R_m(f,a)(x)}{\parallel x-a\parallel^m}=0.$$

Extreme locale

Fie D o submulţime deschisă în R^n şi $f : D \mapsto R$. Un punct $a \in D$ se numeşte punct de extrem local pentru funcţia f dacă există o vecinătate $V \subseteq D$ a punctului a astfel încât $f(x) - f(a) \leq 0, \forall x \in V$ (maxim local) sau $f(x) - f(a) \geq 0, \forall x \in V$ (minim local).

Un punct $a \in D$ se numeşte punct critic al lui f dacă f este diferenţiabilă în a şi $Df(a) = 0$.

Teorema lui Fermat

Cu notaţiile de mai sus, dacă $a \in D$ este punct de extrem local pentru f şi funcţia f este diferenţiabilă în a, atunci a este punct critic al lui f.

Condiţii suficiente de extrem local

Fie $f \in C^2(D)$ şi fie $a \in D$ un punct critic pentru f. Dacă forma pătratică $D^2 f(a)$ este pozitiv definită (respectiv negativ definită) atunci a este minim local (respectiv maxim local) al lui f. Dacă matricea hessiană are valori proprii de semne contrare, atunci a nu este extrem local.

Difeomorfisme

Fie A, B doi deschişi din R^n. O aplicaţie $f : A \mapsto B$ se numeşte difeomorfism dacă este bijectivă, de clasă C^1 şi cu inversa de clasă C^1.

Teorema funcţiei inverse

Dacă intr-un punct $a \in A$ diferenţiala $Df(a)$ este izomorfism liniar (sau, echivalent, $\det(J_f(a)) \neq 0$), atunci f este difeomorfism local în jurul lui a, adică există V vecinătate a lui a şi W vecinătate a lui $f(a)$ astfel încât restricţia $f : V \mapsto W$ să fie difeomorfism.

Teorema funcţiilor implicite

Fie $A \subseteq R^n$ şi $B \subseteq R^m$ două mulţimi deschise.

Notăm $x = (x_1, x_2, .., x_n) \in A$, $y = (y_1, y_2, .., y_m) \in B$ şi $(x, y) \in A \times B$.

Fie $F : A \times B \mapsto R^m, F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), .., f_m(x, y))$ o funcţie de clasă C^1. Fie $(a, b) \in A \times B$ astfel încât

$$F(a, b) = 0 \text{ şi } \frac{D(f_1, f_2, .., f_m)}{D(y_1, y_2, .., y_m)} \neq 0.$$

Atunci există $V \subseteq A$ vecinătate deschisă a lui a şi $W \subseteq B$ vecinătate deschisă a lui b şi o unică funcţie $\phi : V \mapsto W$ cu proprietăţile:

$$\phi \in C^1(V),\ \phi(a) = b \text{ şi } F(x, \phi(x)) = 0, \forall x \in V.$$

Extreme cu legături
Fie $M \subseteq R^p$ o submulţime nevidă şi $a \in M$. Fie f o funcţie definită pe o vecinătate a lui a. Se spune că punctul a este punct de extrem pentru f cu legătura M (sau extrem condiţionat) dacă a este punct de extrem local pentru restricţia lui f la M, sau, echivalent, dacă există V o vecinătate a lui a astfel încât

$$f(x) \leq f(a) \text{ sau } f(x) \geq f(a),\ \forall\, x \in V \cap M.$$

Teorema multiplicatorilor lui Lagrange
Fie D o submulţime deschisă din R^{n+m} şi fie $f : D \mapsto R$ o funcţie de clasă $C^1(D)$. Notăm $D \ni (x, y) = (x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m)$ variabilele din D. Fie $g_k : D \mapsto R,\ \forall k \in \{1, 2, ..., m\}$ funcţii de clasă $C^1(D)$ şi fie

$$M = \{(x, y) \in D \mid g_k(x, y) = 0,\ \forall\, 1 \leq k \leq m\}.$$

Dacă $(a, b) \in M$ este punct de extrem local pentru f cu legătura M astfel încât

$$\frac{D(g_1, g_2, ..., g_m)}{D(y_1, y_2, ..., y_m)}(a, b) \neq 0,$$

atunci există $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \in R^m$ astfel încât (a, b) să fie punct critic al funcţiei

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda_1 g_1(x, y) + \lambda_2 g_2(x, y) + ... + \lambda_m g_m(x, y),$$

sau, echivalent, (a, b) este soluţie a sistemului de $n + 2m$ ecuaţii cu $n + 2m$ necunoscute:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y_k} = 0,\ g_k = 0,\ \forall j \in \{1, 2, ..., n\},\ \forall k \in \{1, 2, ..., m\}.$$

4.2 Derivate parţiale şi diferenţiala

1. Fie $f : R^2 \mapsto R$, $f(x, y) = 2x^3y - e^{x^2}$. Să se calculeze, cu definiţia, derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui f în punctele $(0, 0)$ şi $(-1, 1)$.
Soluţie
Observăm că f este continuă în cele două puncte. Aplicând definiţia, obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-e^{x^2} + 1}{x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x,1)-f(-1,1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{2x^3-e^{x^2}+2+e}{x+1}=6+2e.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)=\lim_{y\to 1}\frac{f(-1,y)-f(-1,1)}{y-1}=-2.$$

2. a. Să se studieze existenţa derivatelor parţiale în origine pentru funcţia

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

b. Este funcţia $g:R^2\mapsto R$, $g(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2}$ de clasă $\mathcal{C}^1(R^2)$?

Soluţie

a. Aplicând definiţia, se obţine:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0,0)-f(0,0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}.$$

Limita de mai sus nu există, deci funcţia f nu are derivate parţiale în origine.

b. Pentru orice $(x,y)\neq(0,0)$, avem:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

În origine derivatele parţiale există şi sunt nule:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{x|x|}{x}=0,\ \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)=0.$$

Verificăm dacă derivatele parţiale sunt continue (în origine):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

deoarece $\left|\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq 2\sqrt{x^2+y^2}$;

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

deoarece $\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\sqrt{x^2+y^2}$. Rezultă că $f\in\mathcal{C}^1(R^2)$.

3. Folosind definiţia, să se calculeze derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiilor următoare, în punctele indicate:

a. $f : R^2 \mapsto R$, $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ în $(1,0)$ şi $(1,1)$.
b. $g : R^3 \mapsto r$, $g(x,y,z) = xe^{yz}$ în $(0,0,0)$ şi $(1,1,1)$.
Soluţie
a. Se calculează mai întâi derivatele parţiale de ordinul întâi într-un punct arbitrar $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Calculăm acum derivatele parţiale de ordinul al doilea (cu definiţia):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2}} - 1}{x-1} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y\sqrt{1+y^2}} = 1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)}{x-1} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} - 1}{y} = 0.$$

Analog se calculează şi în punctul $(1,1)$.
b. Derivatele parţiale de ordinul întâi într-un punct arbitrar sunt:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = e^{yz}, \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = xze^{yz}, \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = xye^{yz}.$$

În $(0,0,0)$ toate derivatele parţiale de ordinul al doilea sunt nule. În punctul $(1,1,1)$, avem:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1,1) = 0, \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(1,1,1) = e = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x}(1,1,1),$$

celelalte calculându-se analog.

4. Fie $f : R^3 \mapsto R^2$, $f(x,y,z) = (x^2 - yz, y^2 - z^2)$. Să se calculeze, folosind definiţia, derivata după direcţia $h = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ a funcţiei f în punctul $(x,y,z) = (1,1,2)$.
Soluţie
Aplicând definiţia, obţinem:

$$\frac{df}{dh}(1,1,2) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left((1,1,2) + t(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})\right) - f(1,1,2)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(-1-\frac{4}{3}t-\frac{1}{3}t^2, -3-\frac{4}{3}t\right)-(-1,-3)}{t} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right).$$

5. Fie $f : R^3 \mapsto R^2$, $f(x,y,z) = (x^3-y^3, x^3+y^3+z^3)$. Să se calculeze derivata după direcţia $h = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$ a lui f în punctul $(1,-1,1)$.

Soluţie

Se aplică definiţia (ca în exerciţiul precedent).

6. Să se calculeze laplacianul următoarelor funcţii:

a. $f : R^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto R, f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

b. $g : R^3 \setminus \{(0,0,0)\} \mapsto R$, $g(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$.

c. $h : R^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto R$, $h(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

d. $k : R^3 \setminus \{(0,0,0)\} \mapsto R$, $k(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Soluţie

Laplacianul unei funcţii f de n variabile, este, prin definiţie:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

O funcţie al cărei laplacian este nul se numeşte funcţie armonică.

a. Calculăm derivatele parţiale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

şi deci $\Delta f = 0$.

b. Derivatele parţiale:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{2y^2+2z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

şi deci $\Delta g = \dfrac{2}{x^2+y^2+z^2}$.

c. Derivatele parţiale:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2x^2-y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}},$$

şi deci $\Delta h = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$.

d. Derivatele parţiale:

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x,y,z) = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{2x^2-y^2-z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}},$$

şi deci $\Delta k = 0$.

7. Să se calculeze laplacianul funcţiilor:

a. $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}$.

b. $g(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1}$.

Soluţie

a. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{6x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^3}$, deci $\Delta f = 4(x^2+y^2)^{-2}$.

b. $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y,z) = \dfrac{6x^2-2(y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}$, deci $\Delta g = 2(x^2+y^2+z^2)^{-2}$.

8. Fie funcţia $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Să se demonstreze că f este continuă, are derivate parţiale de ordinul întâi în orice punct şi nu este diferenţiabilă în origine.

Soluţie

Din inegalitatea: $|f(x,y)| \leq |x|$ rezultă $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, deci funcţia

este continuă. Este evident că în orice punct $(x,y) \neq (0,0)$ funcţia are derivate parţiale de ordinul întâi; studiind existenţa lor în origine (cu definiţia), obţinem: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
Demonstrăm acum că f nu este diferenţiabilă în origine; dacă ar fi, atunci diferenţiala sa ar fi aplicaţia identic nulă deoarece:

$$df(0,0)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = 0.$$

Din definiţia diferenţiabilităţii ar trebui ca:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0,$$

contradicţie cu faptul că această limită nu există. (se pot folosi coordonatele polare).

9. Să se studieze continuitatea şi existenţa derivatelor parţiale în origine pentru funcţiile:

a. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b. $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Soluţie

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho(\rho^2\cos^3\varphi - \sin\varphi)}{\rho} = -\sin\varphi,$$

deci funcţia nu este continuă în origine.
Studiem acum existenţa derivatelor parţiale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x\,|x|} = 0,$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y\,|y|} = -\infty,$$

deci f nu este derivabilă parţial în raport cu y în origine.
b. Din inegalitatea: $|f(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, rezultă că funcţia g este continuă

în origine.
Studiem acum existenţa derivatelor parţiale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x,0)-g(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|}=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{g(0,y)-g(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{|y|}.$$

Ultima limită nu există, deci g nu este derivabilă parţial în raport cu y în origine.

10. Să se demonstreze că următoarele funcţii sunt diferenţiabile în origine dar nu sunt de clasă $\mathcal{C}^1$:

a. $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

b. $g(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^4}} & \text{dacă} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

c. $h(x,y,z)=\begin{cases}\frac{xy^2z}{\sqrt{x^2+y^4+z^2}} & \text{dacă} \quad (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$

Soluţie

a. Calculând derivatele parţiale de ordinul întâi, se obţine:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Derivatele parţiale sunt continue în orice punct $(x,y)\neq(0,0)$, dar în origine nu sunt continue deoarece $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ nu există (se pot folosi coordonatele polare). Am demonstrat deci că f nu este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe R^2. Studiem diferenţiabilitatea în origine (în rest, derivatele parţiale fiind continue, funcţia este diferenţiabilă):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-df(0,0)(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0,$$

deci f este diferenţiabilă în origine.
b. În puncte $(x,y) \neq (0,0)$ derivatele parţiale sunt:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{y^6}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^4}},,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy^5}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^4}}.$$

Evident, (cu definiţia), în origine derivatele parţiale sunt nule.
Derivatele parţiale nu sunt continue în origine; demonstrăm pentru $\frac{\partial g}{\partial x}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial g}{\partial x}(x,0) = 0,$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial g}{\partial x}(y^2,y) = \frac{1}{2},$$

deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial g}{\partial x}$ nu există.
Demonstrăm că g este diferenţiabilă în origine:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)-g(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^4}\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

deoarece:

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^4}}\right| \leq 1 \text{ şi}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

c. Lăsăm ca exerciţiu faptul că h nu este de clasă $\mathcal{C}^1$; demonstrăm că h este diferenţiabilă în origine. Derivatele parţiale în origine sunt toate nule (se aplică definiţia); diferenţiabilitatea:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z)-f(0,0,0)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy^2z}{\sqrt{x^2+y^4+z^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0,$$

deoarece:

$$\left|\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^4+z^2}}\right| \leq 1 \text{ şi}$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0.$$

11. Să se demonstreze că următoarele funcţii nu sunt continue în origine, totuşi au derivate partiale în acest punct.

a. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b. $g(x,y) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)} & \text{dacă} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad xy = 0 \end{cases}$

Soluţie

a. Pentru a demonstra că funcţia nu este continuă în origine, se pot considera şirurile: $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$ şi $(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$; atunci:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n) = 0.$$

Derivatele parţiale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

b. Pentru a demonstra că funcţia nu este continuă în origine, calculăm:

$$\lim_{x\to 0} g(x, mx) = \lim_{x\to 0} e^{-\left(\frac{x^2}{(mx)^2}+\frac{(mx)^2}{x^2}\right)} = e^{-\left(\frac{1}{m^2}+m^2\right)},$$

deci limita nu există (depinde de m).

Derivatele parţiale în origine sunt ambele nule (rezultă direct din definiţia funcţiei).

12. Fie funcţia $f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a. Să se arate că f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe R^2.

b. Să se arate f are derivate parţiale mixte de ordinul al doilea în orice punct şi să se calculeze $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ în origine; este funcţia f de clasă $\mathcal{C}^2$ pe R^2 ?

Soluţie

a. Derivatele parţiale de ordinul întâi sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y \sin \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4y^2x^3}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Se demonstrează că $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue, deci f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe R^2.

b. Evident, funcţia are derivate parţiale de ordinul al doilea în orice punct $(x,y)\neq(0,0)$; studiem existenţa derivatelor mixte în origine (cu definiţia):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 1}{x}=\sin 1;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{y\sin(-1)}{y}=-\sin 1.$$

Funcţia nu este de clasă $\mathcal{C}^2$ pe R^2; dacă ar fi fost, atunci, conform teoremei de simetrie a lui Schwartz, cele două derivate mixte de ordinul al doilea ar fi trebuit să fie egale.

13. Fie funcţia: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a. Să se arate că f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe R^2.

b. Să se arate f are derivate parţiale mixte de ordinul al doilea în orice punct şi să se calculeze $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ în origine; este funcţia f de clasă $\mathcal{C}^2$ pe R^2 ?

Soluţie

Derivatele parţiale de ordinul întâi sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{y^5-x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{dacă} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{3x^3y^2+xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{dacă} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Derivatele parţiale de ordinul al doilea în origine:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)}{x}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)}{y}=1,$$

deci funcţia nu este de clasă $C^2(R^2)$.

14. Să se studieze existenţa derivatelor parţiale şi a diferenţialei în origine pentru funcţia: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2-yx^2}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Soluţie
Funcţia are derivate parţiale în orice punct, dar nu este diferenţiabilă în origine.

15. Fie $f : R^3 \mapsto R$; $f(x,y,z) = x^2 + yz - xy$ şi $a = (1,1,2)$. Să se determine versorul s stiind că $\dfrac{df}{ds}(a)$ este maxim.
Soluţie
$\dfrac{df}{ds}(a) = s \cdot \text{grad}_a f = \parallel s \parallel \cdot \parallel \text{grad}_a f \parallel \cdot \cos(s, \widehat{\text{grad}}_a f) =$

$$= \parallel \text{grad}_a f \parallel \cdot \cos(s, \widehat{\text{grad}}_a f).$$

Deci maximul se obţine atunci când s are aceeaşi direcţie şi acelaşi sens cu $\text{grad}_a f$. Rezultă: $\text{grad}_a f = (1,1,1) \Rightarrow s = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

16. Fie $f : R^3 \mapsto R$; $f(x,y,z) = xy^2 - 2xyz$ şi $a = (2,1,1)$. Să se determine versorul s stiind că $\dfrac{df}{ds}(a)$ este minim.
Soluţie
Repetând rationamentul din exerciţiul anterior, rezultă că minimul se obţine atunci când s are aceeaşi direcţie şi sens opus cu $\text{grad}_a f$.
Rezultă: $\text{grad}_a f = (-1,0,-4) \Rightarrow s = \dfrac{1}{\sqrt{17}}(1,0,4)$.

17. Să se calculeze jacobienii transformărilor în coordonate polare, cilindrice şi sferice.
Soluţie
Transformarea în coordonate polare este:

$$(x,y) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi),\ (\rho,\varphi) \in (0,\infty) \times (0,2\pi).$$

Jacobianul într-un punct arbitrar (ρ,φ) este:

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} = \rho$$

Transformarea în coordonate cilindrice este

$$(x,y,z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z),\ (\rho,\varphi,z) \in (0,\infty) \times (0,2\pi) \times R.$$

Jacobianul într-un punct arbitrar este:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)} = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho.$$

Transformarea în coordonate sferice este

$$(x,y,z) = (\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta), (\rho,\theta,\varphi) \in (0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi).$$

Jacobianul într-un punct arbitrar este:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \det \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = \rho^2\sin\theta.$$

18. Fie funcţia $f : R^2 \mapsto R$, $f(x,y) = e^{x+y}$. Să se scrie polinomul Taylor de gradul n asociat funcţiei f în punctele $(0,0)$ şi $(1,-1)$.

Soluţie

Fie $m, k \in N$, $k \le m \le n$. Se calculează

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}}(x,y) = e^{x+y}$$

şi deci

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}}(0,0) = 1, \ \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}}(1,-1) = 1.$$

Rezultă

$$T_n(f,(0,0))(x,y) = 1 + \frac{1}{1!}(x+y) + \frac{1}{2!}(x+y)^2 + ... + \frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

$$T_n(f,(1,-1))(x,y) = 1 + \frac{1}{1!}((x-1)+(y+1)) +$$

$$+\frac{1}{2!}((x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) + (y+1)^2) + .. + \frac{1}{n!}((x-1)+(y+1))^n =$$

$$= T_n(f,(0,0)).$$

19. Să se calculeze aproximarea liniară în jurul originii a funcţiei

$$f(x,y,z) = \sqrt{\frac{x+1}{(y+1)(z+1)}}$$

Soluţie
Se calculează

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)=\frac{1}{2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)=\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)=-\frac{1}{2}.$$

Aproximarea cerută este polinomul Taylor de gradul întâi:

$$T_1(f,(0,0,0))(x,y,z)=1+\frac{1}{2}(x-y-z).$$

20. Să se calculeze aproximativ $\sqrt{1,01}\sqrt[3]{0,97}$, folosind polinomul Taylor de gradul 2 asociat funcţiei $f(x,y)=\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ în punctul $(1,1)$.
Soluţie
Se calculează

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=\frac{1}{2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=\frac{1}{3},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)=-\frac{1}{4},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)=\frac{1}{6},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)=-\frac{2}{9}.$$

Aproximarea de ordinul 2 a funcţiei f în jurul punctului $(1,1)$ este

$$f(1+h,1+k)\approx f(1,1)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)h+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)k\right)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)k^2\right).$$

În particular pentru $h=0,1$ şi $k=-0,3$, obţinem valoarea aproximativă cerută.

21. Să se determine aproximarea liniară a funcţiei $f(x,y)=x^2e^{x^2+y^2}$ în jurul punctului $(1,-1)$.
Soluţie
Se calculează polinomul Taylor de gradul întâi.

22. Să se calculeze aproximativ $e^{-0,2}\sqrt[4]{1,02}$.
Soluţie
Se poate folosi polinomul Taylor de gradul al doilea asociat funcţiei

$$f(x,y)=e^x\sqrt[4]{y}.$$

23. Să se determine polinomul Taylor de gradul n al funcţiei $f(x,y) = e^{2x+y}$ în origine.
Soluţie
Derivatele parţiale de ordinul k sunt:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j}\partial y^j}(x,y) = 2^{k-j}e^{2x+y}, \forall\, j \in \{0,1,...,k\}.$$

Rezultă:

$$\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} C_k^j \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j}\partial y^j}(0,0)x^{k-j}y^j = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} C_k^j 2^{k-j}x^{k-j}y^j,$$

deci polinomul Taylor de gradul n în origine este:

$$T_n(f,(0,0))(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} C_k^j 2^{k-j}x^{k-j}y^j.$$

24. Să se determine polinomul Taylor de gradul n al funcţiei $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$ în origine.
Soluţie
Analog cu exerciţiul anterior:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^i y^j z^k}(x,y,z) = e^{x+y+z}, \forall\, m = i+j+k.$$

Rezultă:

$$T_n(f,(0,0,0))(x,y,z) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(x+y+z)^k.$$

25. Să se calculeze diferenţialele funcţiilor:
a. $f : R^2 \setminus \{(x,y) \mid x = 0\}$, $f(x,y) = \text{arctg}\frac{y}{x}$.
b. $g : R^2 \setminus \{(x,y) \mid y = 0\}$, $g(x,y) = -\text{arctg}\frac{x}{y}$.
Soluţie
Într-un punct $(x,y) \in R^2\setminus\{(x,y) \mid xy \neq 0\}$, din domeniul comun al funcţiilor f şi g diferenţialele sunt egale:

$$df(x,y) = dg(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

4.3 Diferenţiala funcţiei compuse

26. Fie $f \in \mathcal{C}^2(R^2)$ şi fie $g : R^2 \mapsto R$, $g(x,y) = f(x^2+y^2, x^2-y^2)$. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi şi al doilea ale funcţiei g.

Soluţie

Fie $u = x^2+y^2$ şi $v = x^2-y^2$; derivatele parţiale ale funcţiilor u şi v sunt: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -2y$. Rezultă:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2y\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Derivatele parţiale de ordinul al doilea:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) + 2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) + 4x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right).$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)\right) =$$

$$= 2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 4xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right).$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2y\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) + 2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) + 4y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right).$$

27. Fie $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ şi fie $f \in \mathcal{C}^1(R)$. Să se calculeze laplacianul funcţiilor $g(x,y,z) = f\left(\frac{1}{r}\right)$ şi $h(x,y,z) = f(r)$.

Soluţie
Calculăm mai întâi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{-x}{r^3},\ \ \frac{\partial}{\partial x}(r)=\frac{x}{r}$$

Derivatele parţiale ale funcţiei g:

$$\frac{\partial g}{\partial x}=f'\left(\frac{1}{r}\right)\left(-\frac{x}{r^3}\right),\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=f''\left(\frac{1}{r}\right)\left(-\frac{x}{r^3}\right)^2-f'\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{3x^2-r^2}{r^5}\right)$$

Rezultă $\Delta g=\frac{1}{r^4}f''\left(\frac{1}{r}\right)$. Derivatele parţiale ale funcţiei h:

$$\frac{\partial h}{\partial x}=f'(r)\frac{x}{r},\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=f''(r)\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\frac{r^2-x^2}{r^3},$$

deci $\Delta h=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$.

28. Dacă $f\in\mathcal{C}^2(R^3)$ şi $u(x,y)=f(x^2+y^2,x^2-y^2,2xy)$ să se calculeze derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei u.
Soluţie
Fie $p=x^2+y^2, q=x^2-y^2$ şi $r=2xy$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=2x\frac{\partial f}{\partial p}+2x\frac{\partial f}{\partial q}+2y\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}=2y\frac{\partial f}{\partial p}-2y\frac{\partial f}{\partial q}+2x\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\frac{\partial f}{\partial p}+2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right)+2\frac{\partial f}{\partial q}+$$

$$+2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\frac{\partial q}{\partial x}\right)+$$

$$+2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right)+2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\right)=$$

$$=4x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q}\right)+4xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial r}\right)+4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+2\frac{\partial f}{\partial p}+2\frac{\partial f}{\partial q}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)+4(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial r}+$$

$$+4(x^2-y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial r}+2\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q}\right)+4xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial r}-\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial r}\right)+$$

$$+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+2\frac{\partial f}{\partial p}-2\frac{\partial f}{\partial q}.$$

29. Fie $a\in R$ şi fie g şi h două funcţii de clasă $\mathcal{C}^2$ pe R. Să se demonstreze că $f(x,y)=g(x-ay)+h(x+ay)$ verifică ecuaţia coardei vibrante:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0.$$

Soluţie Calcul direct.

30. Să se afle $f\in\mathcal{C}^2(R)$ ştiind că funcţia $u(x,y)=f(x^2-y^2)$ este armonică pe R^2.

Soluţie

O funcţie este armonică dacă satisface relaţia $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xf'(x^2-y^2)\ ;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2f'(x^2-y^2)+4x^2f''(x^2-y^2).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2yf'(x^2-y^2)\ ;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2f'(x^2-y^2)+4y^2f''(x^2-y^2)$$

Înlocuind în $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, rezultă $4(x^2+y^2)f''(x^2-y^2)=0$; în final se obţine $f(t)=at+b$, cu $a,b\in R$ arbitrar fixate.

31. Să se afle $f\in\mathcal{C}^2(R)$ ştiind că funcţia $v(x,y)=f(\frac{y}{x})$ este armonică.

Soluţie

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'(\frac{y}{x})\ ;\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}f'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^4}f''(\frac{y}{x})$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})\ ;\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}f''(\frac{y}{x}).$$

Înlocuind în ecuaţia dată, rezultă:

$$\frac{x^2+y^2}{x^4}f''(\frac{y}{x})+\frac{2y}{x^3}f'(\frac{y}{x})=0.$$

Notând $t = \frac{y}{x}$ se obţine (după calcule):

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{-2t}{t^2+1},$$

şi deci

$$f(t) = a \cdot \operatorname{arctg}(t) + b$$

cu $a, b \in R$ arbitrar fixate.

32. Să se demonstreze că laplacianul în coordonate polare este:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}.$$

Soluţie
Fie $f \in C^2(R^2), x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi,\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}(-\rho\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\rho\cos\varphi.$$

Rezolvând sistemul, (în necunoscutele $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$), rezultă:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\cos\varphi - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho},\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{\rho}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\cos^2\varphi - 2\frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2} + \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\sin^2\varphi}{\rho} +$$

$$+2\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2} + \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\cos^2\varphi}{\rho} -$$

$$-2\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}.$$

În concluzie:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}.$$

33. Fie ecuaţia diferenţială $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$. Ce devine ecuaţia dacă se face schimbarea de variabile $(x, y) \mapsto (t, y)$, unde $x = e^t$?

Soluţie

Calculăm $\frac{dy}{dx}$ şi $\frac{d^2y}{dx^2}$ în funcţie de $\frac{dy}{dt}$ şi $\frac{d^2y}{dt^2}$. Din $x = e^t$, rezultă $t = \ln x$ şi deci $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$; rezultă:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)\frac{dt}{dx} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Ecuaţia devine: $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2y = 0$.

34. Să se demonstreze că funcţia $z(x, y) = xy + xe^{\frac{y}{x}}$ verifică ecuaţia

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

Soluţie

Se calculează derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui z.

35. Ce devine ecuaţia $x^2y'' + 2xy' + \dfrac{1}{x^2}y = 0$ dacă se face schimbarea de variabile $(x, y) \mapsto (t, y)$, unde $t = \dfrac{1}{x}$.

Soluţie

Se calculează

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} = -t^2\frac{dy}{dt}, \text{ etc.}$$

36. Ce devine ecuaţia $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ prin schimbarea de variabile $(x, y) \mapsto (u, v)$, unde $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$.

Soluţie

Se calculează:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial v}, \text{ etc.}$$

37. Să se determine funcţiile $z = z(x, y)$ care verifică ecuaţia

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2,$$

folosind schimbarea de variabile:

$$(x, y, z) \mapsto (u, v, w), \text{ unde, } u = x,\ v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x},\ w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}.$$

Soluţie
O metodă constă în a calcula mai întâi x, y şi z în funcţie de u, v şi w; se obţine:

$$x = u,\ y = \frac{u}{uv+1},\ z = \frac{u}{uw+1}.$$

Se calculează acum derivatele parţiale ale lui u şi v în raport cu x şi y:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{u^2},\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = -\left(\frac{uv+1}{u}\right)^2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{uw+1}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{uw+1}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{uw+1}\right)\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \frac{1 - u^2\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}}{(uw+1)^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{uw+1}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{uw+1}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{uw+1}\right)\frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$= \left(\frac{uv+1}{uw+1}\right)^2 \frac{\partial w}{\partial v}.$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială, se obţine: $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$. Rezultă deci că w este o funcţie constantă în raport cu variabila u, deci $w = f(v)$, unde f este o funcţie arbitrară de clasă $\mathcal{C}^1$ pe R. Rezultă

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right),$$

deci

$$z(x, y) = \frac{x}{1 + xf\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)}.$$

O altă metodă constă în a calcula:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x^2},\ \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}$$

şi deci

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -z^2\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{z^2}{x^2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -z^2\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Se calculează apoi

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\ \text{ etc.}$$

38. Fie $f \in C^1(R)$ şi $n \in N$. Să se demonstreze că funcţia

$$z(x,y) = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

verifică ecuaţia:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

Soluţie
$\frac{\partial z}{\partial x} = nx^{n-1}f\left(\frac{y}{x^2}\right) - 2yx^{n-3}f'\left(\frac{y}{x^2}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^{n-2}f'\left(\frac{y}{x^2}\right)$.

39. O funcţie $f : D \mapsto R$ se numeşte omogenă de grad r pe D dacă

$$f(t(x_1,x_2,...,x_n)) = t^r f(x_1,x_2,...,x_n), \forall t \in R^*, \forall (x_1,x_2,...,x_n) \in D.$$

Să se arate că orice funcţie omogenă de grad r pe R^3 satisface relaţiile:
a. $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = rf.$
b. $\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f = r(r-1)f.$
Soluţie
a. Derivând în raport cu t relaţia

$$f(tx,ty,tz) = t^r f(x,y,z),$$

rezultă:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz) + z\frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz) = rt^{r-1}f(x,y,z) \ \ (\star)$$

În particular pentru $t = 1$, se obţine relaţia de la punctul a.
b. Se derivează în continuare relaţia $(\star)$ în raport cu t.

40. Operatori diferenţiali
Fie $\overline{V} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ un câmp de vectori de clasă $\mathcal{C}^2$ pe un deschis $U \subseteq R^3$

şi $f \in \mathcal{C}^2(U)$ (câmp scalar). Operatorii diferenţiali de ordinul întâi sunt gradientul, divergenţa şi rotorul, definiţi pentru orice $a \in U$ astfel:

$$(\text{grad}f)(a) = (\nabla f)(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\overline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\overline{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(a)\overline{k}.$$

$$(\text{div}\overline{V})(a) = (\nabla \overline{V})(a) = \frac{\partial P}{\partial x}(a) + \frac{\partial Q}{\partial y}(a) + \frac{\partial R}{\partial z}(a).$$

$$(\text{rot}\overline{V})(a) = (\nabla \times \overline{V})(a) =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y}(a) - \frac{\partial Q}{\partial z}(a)\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}(a) - \frac{\partial R}{\partial x}(a)\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(a) - \frac{\partial P}{\partial y}(a)\right)\overline{k}.$$

În cele ce urmează vom nota cu $\overline{r} = (x, y, z)$ vectorul de poziţie şi cu $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ norma sa. Evident, $\overline{r}$ este un câmp vectorial, iar r este un câmp scalar.

Pentru orice câmpuri vectoriale $\overline{V}$ şi $\overline{W}$ şi orice câmpuri scalare f şi g de clasă C^2, au loc relaţiile:

a. $\text{grad}(fg) = f\text{grad}g + g\text{grad}f$.

b. $\text{div}(f\overline{V}) = f\text{div}\overline{V} + \overline{V}\text{grad}f$.

c. $\text{div}(\overline{V} \times \overline{W}) = \overline{W}\text{rot}\overline{V} - \overline{V}\text{rot}\overline{W}$.

d. $\text{rot}(f\overline{V}) = f\text{rot}\overline{V} - \overline{V} \times \text{grad}f$.

e. $\text{grad}(\overline{V}\ \overline{W}) = \overline{W} \times \text{rot}\overline{V} + \overline{V}\text{rot}\overline{W} + \frac{d\overline{V}}{d\overline{W}} + \frac{\overline{W}}{d\overline{V}}$,

unde, $\frac{d\overline{V}}{d\overline{W}}$ este derivata după direcţia $\overline{W}$ a lui $\overline{V}$.

f. $\text{rot}(\overline{V} \times \overline{W}) = \overline{V}\text{div}\overline{W} - \overline{W}\text{div}\overline{V} + \frac{d\overline{V}}{d\overline{W}} - \frac{d\overline{W}}{d\overline{V}}$.

g. $\frac{df}{d\overline{a}} = \overline{a}\text{grad}f$, $\text{grad}(\overline{a}\ \overline{r}) = \overline{a}$, pentru orice vector constant $\overline{a}$.

h. $\text{grad}r^\alpha = \alpha r^{\alpha-2}\overline{r}$, $\forall \alpha \in R$.

i. $\text{rot}(\text{grad}f) = \overline{0}$.

j. $\text{div}(\text{rot}\overline{V}) = 0$.

k. $\text{div}(\text{grad}f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Soluţie

Calcul direct.

41. Să se calculeze divergenţa câmpului vectorial

$$\overline{V} = \overline{r} + \frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}\overline{r},$$

unde $\overline{k}$ este versorul axei Oz, $\overline{k} = (0, 0, 1)$.

Soluţie

$$\mathrm{div}\overline{V} = \mathrm{div}\left(\overline{r} + \frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}\overline{r}\right) = 3 + \left(\frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}\right)\mathrm{div}\overline{r} + \overline{r}\mathrm{grad}\left(\frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}\right) =$$

$$= 3 + 3\frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4} + \overline{r}\left(\frac{1}{r^4}\mathrm{grad}(\overline{k}\,\overline{r}) + (\overline{k}\,\overline{r})\mathrm{grad}r^{-4}\right) =$$

$$= 3 + 3\frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4} + \overline{r}\left(\frac{\overline{k}}{r^4} - 4\frac{(\overline{k}\,\overline{r})}{r^6}\overline{r}\right) = 3.$$

42. Să se calculeze rotorul câmpului vectorial $\overline{V} = \dfrac{1}{r}(\overline{k} \times \overline{r})$.

Soluţie

$$\mathrm{rot}\overline{V} = \mathrm{rot}\left(\frac{1}{r}\left(\overline{k} \times \overline{r}\right)\right) = \frac{1}{r}\,\mathrm{rot}(\overline{k} \times \overline{r}) - (\overline{k} \times \overline{r})\,\mathrm{grad}\frac{1}{r} =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\overline{k}\,\mathrm{div}\overline{r} - \overline{r}\,\mathrm{div}\overline{k} + \frac{d\overline{k}}{d\overline{r}} - \frac{d\overline{r}}{d\overline{k}}\right) + (\overline{k} \times \overline{r})\,\frac{\overline{r}}{r^3} = \frac{2\overline{k}}{r}.$$

43. Să se verifice că următoarele transformări sunt difeomorfisme şi să se calculeze jacobianul transformării inverse:

a. $F : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \mapsto R^2 \setminus \{(0, 0)\}, F(\rho, \varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$.

b. $G : R^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto R^2 \setminus \{(0, 0)\}, G(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$.

Soluţie

a. Fie $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$; atunci $\dfrac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \rho \neq 0$, iar iacobianul transformării inverse este

$$\frac{D(\rho, \varphi)}{D(x, y)} = \left(\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)}\right)^{-1} = \frac{1}{\rho}.$$

b. Fie $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$. Atunci

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{şi} \quad \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = -(x^2 + y^2)^2.$$

44. Fie aplicaţia

$$F : \{(x,y) \in R^2 \,|\, x > 0, y > 0\} \mapsto \{(x,y) \in R^2 \,|\, y > 0\},\ F(x,y) = (xy, 3y).$$

Să se demonstreze că F este un difeomorfism.
Soluţie
Se demonstrează că F este bijectivă. Evident, F este de clasă $\mathcal{C}^1$. Iacobianul intr-un punct arbitrar este $3y \neq 0$, deci F este difeomorfism. Se poate calcula şi transformarea inversă: $F^{-1}(x,y) = \left(\frac{3x}{y}, \frac{y}{2}\right)$.

45. Să se demonstreze că aplicaţia

$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \mapsto \{(x,y) \in R^2 \,|\, x > 0\}, f(x,y) = \left(xy, \frac{1}{2}\left(y^2 - x^2\right)\right)$$

este un difeomorfism şi să se calculeze inversa.
Soluţie
Faptul că f este difeomorfism local rezultă din faptul că iacobianul este nenul în orice punct: $\det\left(J_f(x,y)\right) = x^2 + y^2 \neq 0$.
Se arată că f este o bijecţie şi

$$f^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - y}, \frac{x}{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - y}}\right).$$

4.4 Extreme locale

46. Să se calculeze extremele locale ale funcţiilor:
a. $f : R^2 \mapsto R$, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$.
b. $g : R^2 \mapsto R$, $g(x,y) = x^3 + 8y^3 - 2xy$.
c. $h : R^2 \mapsto R$, $h(x,y) = x^2 y e^{2x+3y}$.
Soluţie
a. Punctele critice ale funcţiei f sunt soluţiile sistemului:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & 0 \end{array}\right. , \text{ adică } \left\{\begin{array}{rcl} 3x^2 - 6y & = & 0 \\ 3y^2 - 6x & = & 0 \end{array}\right.$$

Rezultă două puncte critice: $(0,0)$ şi $(2,2)$. Pentru a decide dacă acestea

sunt puncte de extrem, se calculează matricea hessiană (mai întâi într-un punct arbitrar):

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 6y \end{pmatrix}$$

În punctele critice se obţine:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \text{ şi } H_f(2,2) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$$

Valorile proprii ale matricei $H_f(0,0)$ sunt de semne contrare, deci $(0,0)$ nu este punct de extrem, iar valorile proprii ale matricei $H_f(2,2)$ sunt ambele strict pozitive, deci $(2,2)$ este punct de minim local.
b. Punctele critice sunt $(0,0)$ şi $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$. Primul nu este punct de extrem, iar al doilea este punct de minim local.
c. Mulţimea punctelor critice este: $\{(0,y) \,|\, y \in R\} \cup \{(-1, -\frac{1}{3})\}$. Punctul $(-1, -\frac{1}{3})$ este punct de minim (matricea hessiană are valorile proprii pozitive). În punctele $(0,y)$, criteriul cu matricea hessiană nu decide (există o valoare proprie nulă). Se evaluează semnul diferenţei

$$f(x,y) - f(0,y) = x^2 y e^{2x+3y}.$$

Pentru puncte situate deasupra axei Ox (adică $y > 0$), există un disc (de rază suficient de mică, de exemplu $\frac{y}{2}$), pe care diferenţa $f(x,y) - f(0,y)$ este pozitivă, deci aceste puncte sunt minime locale. Analog, punctele situate sub axa Ox sunt maxime locale. Pentru $y = 0$ (deci în origine), diferenţa $f(x,y) - f(0,0)$ nu păstrează semn constant pe nici o vecinătate a lui $(0,0)$, deci originea nu este punct de extrem.

47. Să se determine extremele locale ale funcţiilor:
a. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y - 6z, (x,y,z) \in R^3$.
b. $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z, (x,y,z) \in R^3$.
c. $h(x,y,z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + z,\ x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$.

Soluţie
a. Funcţia f are un singur punct critic, $(-1,-3,3)$. Matricea hessiană are toate valorile proprii strict pozitive, deci punctul $(-1,-3,3)$ este minim local.
b. Funcţia g are punctul critic $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ care este minim local deoarece valorile proprii ale hessianei sunt stict pozitive.

c. Punctele critice sunt $(1,1,1)$ şi $(-1,1,-1)$. Matricea hessiană într-un punct arbitrar este

$$H_h(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & -\frac{1}{y^2} & 0 \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} & -\frac{1}{z^2} \\ 0 & -\frac{1}{z^2} & \frac{2y}{z^3} \end{pmatrix}$$

Punctul $(1,1,1)$ este minim local, iar $(-1,1-1)$ este maxim local.

48. Să se determine punctele de extrem local ale funcţiilor
$f : R^2 \mapsto R$, $f(x,y) = xy$ şi $g : R^3 \mapsto R$, $g(x,y,z) = xyz$.
Soluţie
Singurul punct critic al funcţiei f este $(0,0)$ care nu este punct de extrem deoarece diferenţa $f(x,y) - f(0,0)$ nu păstrează semn constant pe nici o vecinătate a originii. Punctele critice ale funcţiei g sunt

$$(x,0,0), (0,y,0), (0,0,z),\ \forall x,y,z \in R.$$

Funcţia nu are puncte de extrem.

49. Să se determine extremele locale ale funcţiilor:
a. $f : (0,2\pi) \times (0,2\pi) \mapsto R, f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$.
b. $g : (0,\pi)^3 \mapsto R, g(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$.
Soluţie
a. Punctele critice sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos x \sin y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) = \sin y \sin(2x+y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin x \cos y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) = \sin x \sin(x+2y) = 0 \end{cases}$$

Rezultă punctele critice: $(x_1,y_1) = (\pi,\pi)$ şi $(x_2,y_2) = \left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$.
Derivatele parţiale de ordinul al doilea:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\sin y \cos(2x+y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\sin x \cos(x+2y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin(2x+2y).$$

Punctul (x_2,y_2) este maxim local:

$$rt - s^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = \frac{9}{4} > 0,\ r = -\sqrt{3} < 0.$$

În punctul $(x_1, y_1) = (\pi, \pi)$, derivatele parţiale de ordinul al doilea sunt nule, deci trebuie evaluat semnul diferenţei $f(x,y) - f(\pi,\pi) = \sin x \sin y \sin(x+y)$ în jurul punctului (π, π). Se poate face acest lucru fie folosind formula lui Taylor de ordinul 3, fie direct, observând că pentru $x < \pi$, $y < \pi$ diferenţa este negativă, iar pentru puncte $x > \pi, y > \pi$ diferenţa este pozitivă. Rezultă că (x_1, y_1) nu este extrem local.
În particular, rezultă inegalitatea

$$\sin x \sin y \sin(x+y) \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3, \forall x, y \in (0, \pi)$$

b. Se calculează punctele critice ale funcţiei g:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} &= \cos x - \cos(x+y+z) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \cos y - \cos(x+y+z) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial z} &= \cos z - \cos(x+y+z) = 0 \end{cases}$$

deci

$$\cos x = \cos y = \cos z = \cos(x+y+z).$$

Deoarece funcţia cos este injectivă pe $(0, \pi)$, rezultă $x = y = z$. Se obţine $\cos x = \cos 3x$, adică $2 \sin x \sin 2x = 0$, cu singura soluţie $x = \frac{\pi}{2}$. Rezultă punctul critic $(x, y, z) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Derivatele parţiale de ordinul al doilea sunt:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\sin x + \sin(x+y+z), \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\sin y + \sin(x+y+z),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = -\sin z + \sin(x+y+z),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} = \sin(x+y+z).$$

În punctul critic matricea hessiană este $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic $P(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda + 4$ are toate rădăcinile strict negative, deci $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ este punct de maxim. Se observă că este un maxim global.

50. Să se determine punctele de extrem local ale funcţiilor:
a. $f(x,y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36x + 9$, $(x,y) \in R^2$.
b. $f(x,y) = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3x^2 - 3x$, $(x,y) \in R^2$.
c. $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$, $\forall\, (x,y) \in R^2$.
Soluţie
a. Punctele critice sunt $(x_1,y_1) = (2,3)$, $(x_2,y_2) = (-2,-3)$; nici unul nu este punct de extrem.
b. Punctele critice sunt

$$(x_1,y_1) = (1+\sqrt{2},2),\ (x_2,y_2) = (1+\sqrt{2},2+\sqrt{3}), (x_3,y_3) = (1+\sqrt{2},2-\sqrt{3}),$$

$$(x_4,y_4) = (1-\sqrt{2},2),\ (x_5,y_5) = (1-\sqrt{2},2+\sqrt{3}),\ (x_6,y_6) = (1-\sqrt{2},2-\sqrt{3}).$$

Punctele de extrem sunt (x_2,y_2), (x_3,y_3) (minime) şi (x_4,y_4) (maxim).
c. Punctele critice sunt $(0,0), (1,1), (-1,-1)$; primul nu este punct de extrem, celelalte sunt puncte de maxim.

51. Să se determine extremele locale ale funcţiilor:
a. $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \mapsto R$, $f(x,y) = 4x^2 + \frac{2}{xy^2} + y^2$
b. $f : R^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto R$, $f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
Soluţie
a. Funcţia f este de clasă $\mathcal{C}^2$ şi are in domeniul de definiţie un singur punct critic $(x_1,y_1) = \left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$.
În punctul critic matricea hessiană este $\begin{pmatrix} 24 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}$. $\Delta_1 = 24 > 0$ şi $\Delta_2 = 24\cdot 8 - 32 > 0$ deci $\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$ este punct de minim local şi $f\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right) = 4$.
b. Funcţia f este de clasă $\mathcal{C}^2$ şi are in domeniul de definiţie punctele critice $(x,x), x \in R^\star$
Matricea hessiană intr-un punct critic este

$$H_f(x,x) = \begin{pmatrix} \frac{-x}{2\sqrt{2}|x|^3} & \frac{x}{2\sqrt{2}|x|^3} \\ \frac{x}{2\sqrt{2}|x|^3} & \frac{-x}{2\sqrt{2}|x|^3} \end{pmatrix}$$

Dacă $x < 0$ atunci (x,x) sunt puncte de minim şi $f_{\min} = -\sqrt{2}$; dacă $x > 0$, atunci (x,x) sunt puncte de maxim şi $f_{\max} = \sqrt{2}$.

52. Să se determine extremele locale ale funcţiilor:
a. $f : R^2 \mapsto R$, $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$
b. $f : R^3 \mapsto R$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + yz + 2xz$

Soluţie
a. Funcţia f este de clasă $\mathcal{C}^2$ şi are in domeniul de definiţie punctele critice $(x_1, y_1) = (0, 0); (x_2, y_2) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}); (x_3, y_3) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
Într-un punct oarecare matricea hessiană este

$$\begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Punctele $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}); (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sunt minime locale, iar $(0, 0)$ nu este extrem.
b. Funcţia f este de clasă $\mathcal{C}^2$ şi are in domeniul de definiţie un singur punct critic $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$.
Matricea hessiană în punctul critic este $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.
$\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$ şi $\Delta_3 = 4 > 0$ deci $(0, 0, 0)$ este punct de minim local strict şi $f_{\min} = 0$.

53. Să se determine extremele locale ale funcţiei:

$$F : R^2 \mapsto R,\ f(x, y) = x^3 + 3xy - 15x - 12y.$$

Soluţie
Punctele critice sunt $(1, 2), (2, 1), (-2, -1)$; folosind matricea hessiană, se decide natura acestor puncte.

54. Să se determine extremele globale ale funcţiilor:
a. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$,
b. $g(x, y) = \frac{2x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
Soluţie
Se trece la coordonate polare şi se reduce problema la a determina extremele unor funcţii de o singură variabilă reală.

55. Să se determine extremele locale ale funcţiei:
$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, definită pentru $x > 0, y > 0, z > 0$.
Soluţie
Se determină punctele critice şi apoi, folosind matricea hessiană, se decide natura lor.

56. Să se determine extremele funcţiilor:
a. $f(x, y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, definită pentru $x^2 + y^2 < 1$.

b. $g(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y,\ (x,y) \in R^2$.
Soluţie
a. Punctele critice sunt $(0,0),\ (\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}),\ (\frac{-\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3})$.
b. Punctele critice sunt $(2n\pi, 0)$ şi $((2n+1)\pi, -2), \forall n \in Z$. Primele sunt puncte de maxim, iar celelalte nu sunt puncte de extrem.

57. Să se determine extremele următoarelor funcţii:
a. $f(x,y,z) = xy\ln(x^2+y^2)$.
b. $g(x,y,z) = -2x^2 + 2xy - 5y^2 + 6x + 6y$.
Soluţie
a. Puncte de maxim: $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}), (-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$;
puncte de minim: $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}), (-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$.
b. Funcţia are un singur punct de extrem (maxim): $(2,1)$.

4.5 Funcţii implicite

58. Funcţia $z = z(x,y)$ este definită implicit de ecuaţia

$$(y+z)\sin z - y(x+z) = 0.$$

Să se calculeze expresia:

$$E = (z\sin z)\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Soluţie
Fie $F(x,y,z) = (y+z)\sin z - y(x+z)$. Funcţia $z = z(x,y)$ există în vecinătatea punctelor cu proprietatea $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, adică

$$\sin z + (y+z)\cos z - y \neq 0.$$

În această ipoteză, se calculează derivatele parţiale ale funcţiei z, derivând relaţia $F(x,y,z) = 0$ în raport cu x şi respectiv y, (z este funcţie de x şi y):

$$\frac{\partial z}{\partial x}\sin z + (y+z)\cos z\frac{\partial z}{\partial x} - y\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

deci:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\sin z + (y+z)\cos z - y}.$$

$$\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\sin z+(y+z)\cos z\frac{\partial z}{\partial y}-(x+z)-y\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

deci

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+z-\sin z}{\sin z+(y+z)\cos z-y}.$$

Înlocuind $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ cu valorile obţinute mai sus în expresia E, se obţine

$$E=\frac{yF(x,y,z)}{\sin z+(y+z)\cos z-y}=0.$$

59. Fie $g\in\mathcal{C}^1(R^2)$ şi fie funcţia $z=z(x,y)$ definită implicit de ecuaţia $g(y^2-x^2,z-xy)=0$. Să se calculeze expresia $E=y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}$.

Soluţie

Fie funcţia $F(x,y,z)=g(y^2-x^2,z-xy)$. Notăm $u=y^2-x^2$ şi $v=z-xy$. Condiţia de existenţă a funcţiei $z=z(x,y)$ este $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$, adică $\frac{\partial g}{\partial v}\neq 0$. În această ipoteză, se calculează derivatele parţiale ale funcţiei z:

$$\frac{\partial g}{\partial u}(-2x)+\frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x\frac{\partial g}{\partial u}+y\frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial g}{\partial v}}.$$

$$2y\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}-x\right)=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x\frac{\partial g}{\partial v}-2y\frac{\partial g}{\partial u}}{\frac{\partial g}{\partial v}}.$$

Înlocuind, se obţine: $E=x^2+y^2$.

60. Fie $a\in R$ şi fie funcţia $z=z(x,y)$ definită de ecuaţia

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Să se calculeze diferenţiala întâi şi diferenţiala a doua ale funcţiei z.

Soluţie

Fie funcţia $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2$. Funcţia $z=z(x,y)$ există în vecinătatea punctelor cu proprietatea $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$, adică $z\neq 0$. Există deci două submulţimi ale sferei de centru O şi rază a pe care există câte o funcţie z: semisfera $x^2+y^2+z^2=a^2, z>0$ şi semisfera $x^2+y^2+z^2=a^2, z<0$. Vom calcula diferenţialele funcţiei z asociate primei semisfere ($z>0$):

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Analog, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ şi deci

$$dz = -\frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dy = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}dx - \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}dy.$$

Diferenţiala a doua:

$$2 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

deci:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x^2 + z^2}{z^3} = \frac{y^2 - a^2}{z^3} = \frac{y^2 - a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)^3}}.$$

$$2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + 2z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

deci

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}{z} = -\frac{xy}{z^3} = -\frac{xy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)^3}}.$$

În concluzie:

$$d^2 z = \frac{y^2 - a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)^3}}dx^2 - \frac{2xy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)^3}}dxdy + \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)^3}}dy^2$$

61. Funcţiile $u = u(x, y)$ şi $v = v(x, y)$ sunt definite implicit de sistemul de ecuaţii $u + v = x + y$, $ux + vy = 1$. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi şi al doilea ale funcţiilor u şi v.

Soluţie

Fie $F : R^4 \mapsto R^2$, $F(x, y, u, v) = (u + v - x - y, ux + vy - 1)$. Notând $f(x, y, u, v) = u + v - x - y$ şi $g(x, y, u, v) = ux + vy - 1$, condiţia de existenţă a funcţiilor u şi v este $\frac{D(f,g)}{D(u,v)} \neq 0$, adică $y - x \neq 0$. În această ipoteză, derivând în raport cu x şi respectiv y relaţiile $f = 0$, $g = 0$, se obţine:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \text{ şi } u + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \text{ şi } x\frac{\partial u}{\partial y} + v + y\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

de unde rezultă:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u+y}{y-x},\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u+x}{x-y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{v+y}{y-x},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{v+x}{x-y}.$$

Pentru a calcula derivatele parţiale de ordinul al doilea, se derivează în continuare în raport cu x şi respectiv y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\ \text{şi}\ 2\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,$$

de unde rezultă

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2\frac{\partial u}{\partial x}}{y-x}=\frac{2(u+y)}{(y-x)^2}.$$

Analog se calculează şi celelalte derivate parţiale de ordinul al doilea.

62. Fie $F\in C^2(R^2)$. Funcţia $y=y(x)$ este definită implicit de ecuaţia

$$F(\sin x+y,\cos y+x)=0.$$

Să se determine y'' în punctele critice ale lui y.

Soluţie

Fie $u=\sin x+y$, $v=\cos y+x$. Condiţia de existenţă a funcţiei y este $\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial v}\sin y\neq 0$. Derivând ecuaţia $F(u,v)=0$ în raport cu x, rezultă:

$$(*)\ \ (y'+\cos x)\frac{\partial F}{\partial u}+(1-y'\sin y)\frac{\partial F}{\partial v}=0.$$

Se obţine:

$$y'=\frac{\frac{\partial F}{\partial u}\cos x+\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial u}}.$$

Derivând relaţia $(*)$ în raport cu x şi înlocuind $y'=0$, rezultă (în punctele critice):

$$y''=\frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\cos^2 x-2\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}\cos x-\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}+\frac{\partial F}{\partial u}\sin x}{\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial v}\sin y}.$$

63. Funcţiile $y=y(x)$ şi $z=z(x)$ sunt definite implicit de sistemul

$$\left\{\begin{array}{rcl}\sin x+\sin y+\sin z & = & a\\ x^2+y^2+z^2 & = & b\end{array}\right.,a,b\in R.$$

Să se calculeze y'' şi z''.

Soluţie

Fie $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - a$, $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - b$ şi $F(x,y,z) = (f(x,y,z), g(x,y,z))$. Condiţia de existenţă pentru funcţiile y şi z este $\frac{D(f,g)}{D(y,z)} \neq 0 \Leftrightarrow 2z\cos y - 2y\cos z \neq 0$. Derivând ecuaţiile $f = 0$, $g = 0$ în funcţie de x , rezultă:

$$(*)\begin{cases} \cos x + y'\cos y + z'\cos z &= 0 \\ 2x + 2yy' + 2zz' &= 0 \end{cases}$$

Soluţia sistemului este

$$y' = \frac{x\cos z - z\cos x}{z\cos y - y\cos z},\ z' = \frac{y\cos x - x\cos y}{z\cos y - y\cos z}.$$

Derivând relaţiile $(\star)$în funcţie de x, rezultă:

$$\begin{cases} y''\cos y - (y')^2\sin y + z''\cos z - (z')^2\sin z &= \sin x \\ 2(y')^2 + 2yy'' + 2(z')^2 + 2zz'' &= -2 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul, rezultă y'' şi z''.

64. Funcţiile $u = u(x,y), v = v(x,y), z = z(x,y)$ sunt definite implicit de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} u + \ln v &= x \\ v - \ln u &= y \\ z &= 2u + v \end{cases}$$

Să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

Soluţie

Fie funcţiile:
$f(x,y,u,v,z) = u + \ln v - x$,
$g(x,y,u,v,z) = v - \ln u - y$,
$h(x,y,u,v,z) = z - 2u - v$
şi fie $F = (f,g,h)$. Condiţia de existenţă a funcţiilor u, v, z este

$$\frac{D(f,g,h)}{D(u,v,z)} \neq 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{uv} \neq 0.$$

Derivând relaţiile $f = 0, g = 0, h = 0$ în raport cu x, rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{uv}{1+uv},\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v}{1+uv},\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2uv + v}{1+uv}.$$

Derivând relaţiile $f = 0, g = 0$ în raport cu y, rezultă:

$$(*)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ -\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 1 \end{cases}.$$

Soluţia sistemului este: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{u}{1+uv}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{uv}{1+uv}$.
Derivând relaţiile $(*)$ în raport cu x, rezultă

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 0 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul, rezultă

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{uv(u-1)}{(1+uv)^3}.$$

Analog se calculează şi $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

65. Fie $g \in C^1(R)$ şi fie funcţia $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia $xyz = e^{g(z)}$. Să se demonstreze că z nu are puncte critice.
Soluţie
Fie $F(x, y, z) = xyz - e^{g(z)}$; condiţia de existenţă a funcţiei z este

$$\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0 \Leftrightarrow xy - g'(z)e^{g(z)} \neq 0.$$

Derivând ecuaţia $F = 0$ în raport cu x se obţine:

$$yz + xy\frac{\partial z}{\partial x} - e^{g(z)}g'(z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Rezultă

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz}{xy - g'(z)e^{g(z)}}$$

şi analog,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz}{xy - g'(z)e^{g(z)}}.$$

Sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\ F(x, y, z) &= 0 \end{cases}$$

nu are soluţii, deci z nu are puncte critice.

66. Să se determine extremele funcţiei $y = y(x)$ definite implicit de ecuaţia $x^3 + y^3 - 2xy = 0$.

Soluţie

Fie $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$. Funcţia $y = y(x)$ este definită în vecinătatea punctelor pentru care $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, adică $3y^2 - 2x \neq 0$. În această ipoteză, se determină punctele critice ale funcţiei y:

$$3x^2 + 3y^2y' - 2y - 2xy' = 0 \Rightarrow y'(x) = \frac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}.$$

Punctele critice sunt soluţiile sistemului:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & 0 \\ F & = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \neq & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2y - 3x^2 & = & 0 \\ x^3 + y^3 - 2xy & = & 0 \\ 3y^2 - 2x & \neq & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \frac{3x^2}{2} \\ x^3\left(27x^3 - 16\right) & = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \neq & 0 \end{array} \right. .$$

Unica soluţie este $(x, y) = \left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}, \frac{2\sqrt[3]{4}}{3}\right)$. Pentru a decide dacă $x = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$ este punct de extrem local pentru y, vom calcula $y''\left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}\right)$:

$$6x + 6y\left(y'\right)^2 + 3y^2y' - 2y' - 2y' - 2xy'' = 0, \Rightarrow y''(\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}) = -3 < 0,$$

deci $x = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$ este maxim local pentru y şi $y(\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}) = \frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$.

67. Să se determine extremele funcţiei $z = z(x, y)$, definite implicit de ecuaţia $z^3 + z + 20(x^2 + y^2) - 8(xy + x + y) = 0$.

Soluţie

Fie $F(x, y, z) = z^3 + z + 20(x^2 + y^2) - 8(xy + x + y)$; condiţia de existenţă a funcţiei z este $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, adică $3z^2 + 1 \neq 0$. Evident, condiţia este îndeplinită pentru orice $x, y, z \in R$. Derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui z:

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + 40x - 8(y + 1) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{8(y + 1) - 40x}{3z^2 + 1}.$$

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} + 40y - 8(x + 1) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{8(x + 1) - 40y}{3z^2 + 1}.$$

Punctele critice ale funcţiei z sunt soluţiile sistemului:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial z}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} & = & 0 \\ F(x, y, z) & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{8(y+1)-40x}{3z^2+1} & = & 0 \\ \frac{8(x+1)-40y}{3z^2+1} & = & 0 \\ z^3 + z + 20(x^2 + y^2) - 8(xy + x + y) & = & 0 \end{array} \right.$$

Unica soluţie a sistemului este $(x, y, z) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1)$. Pentru a decide dacă el este punct de extrem local, se calculează derivatele parţiale ale funcţiei z.

$$6z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 40 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{40}{3z^2+1}.$$

$$6z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 40 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{40}{3z^2+1}.$$

$$6z\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - 8 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{8}{3z^2+1}.$$

Rezultă

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = -10,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = -10,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = 2,$$

deci în punctul $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, funcţia z are un maxim local.

68. Fie $a \in R$, $a \neq 0$; să se determine extremele locale ale funcţiei $z = z(x, y)$ definite implicit de ecuaţia $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 - x^2 - z^2$.

Soluţie

Fie $F(x, y, z) = (x^2+y^2+z^2)^2-a^2+x^2+z^2$; Condiţia de existenţă a funcţiei z este $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, adică $z \neq 0$. În această ipoteză, se calculează derivatele parţiale ale funcţiei z:

$$2(x^2 + y^2 + z^2)\left(2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}.$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2)\left(2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

de unde rezultă $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-2y(x^2 + y^2 + z^2)}{z(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1)}$.

Sistemul $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\ F(x, y, z) &= 0 \end{cases}$ are soluţiile

$$(x_1, y_1, z_1) = \left(0, 0, \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2}}\right) \text{ şi}$$

$$(x_2, y_2, z_2) = \left(0, 0, -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2}}\right).$$

Se observă că este verificată condiţia $z \neq 0$. Derivatele parţiale de ordinul al doilea:

$$\left(2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + (x^2+y^2+z^2)\left(2 + 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + 2 + 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2z\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0,$$

de unde rezultă $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{3z^2+y^2+z^2+1}{z(x^2+y^2+z^2+1)}$.

$$4y^2 + (x^2+y^2+z^2)\left(2 + 2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + 2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

de unde rezultă $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{x^2+3y^2+z^2}{z(x^2+y^2+z^2+1)}$.

$$\left(2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(2y + 2z\frac{\partial z}{\partial x}\right) +$$

$$+(x^2+y^2+z^2)\left(2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + 2z\frac{\partial^2 z}{\partial x}\partial y\right) + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + 2z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

de unde rezultă $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{2xy}{z(x^2+y^2+z^2+1)}$.

Calculând derivatele parţiale de ordinul al doilea în punctul critic $(0,0)$, rezultă:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = -\frac{1}{z},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0) = 0,\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = -\frac{z}{z^2+1}.$$

Deoarece $rt - s^2 = \frac{1}{z^2+1} > 0$, (şi pentru z_1 şi pentru z_2), rezultă că atât z_1 cât şi z_2 au extreme locale în $(0,0)$. Funcţia z_1 satisface condiţia $r < 0$, deci are un maxim local în $(0,0)$, iar valoarea ei în acest punct este

$$z_1(0,0) = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}}.$$

Funcţia z_2 satisface condiţia $r > 0$, deci are un minim local în $(0,0)$, iar valoarea ei în acest punct este

$$z_2(0,0) = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}}.$$

69. Să se determine extremele locale ale funcţiei $y = y(x)$ definite implicit de ecuaţia $x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0$.

Soluţie
Fie $F(x,y) = x^3+y^3-3x^2y-3$. Condiţia de existenţă pentru y este $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, adică $3y^2 - 3x^2 \neq 0$. În această ipoteză, se calculează y':

$$3x^2 + 3y^2y' - 6xy - 3x^2y' = 0 \Rightarrow y'(x) = \frac{2xy - x^2}{y^2 - x^2},$$

deci punctele critice ale funcţiei y sunt

$$x_1 = 0,\ y_1(0) = \sqrt[3]{3},\ x_2 = -2,\ y_2(-2) = -1.$$

$$6x + 6y(y')^2 + 3y^2y'' - 6y - 12xy' - 3x^2y'' = 0 \Rightarrow$$

$$y''(x) = \frac{-2x + 2y - 2y(y')^2 + 4xy'}{y^2 - x^2}.$$

Rezultă $y''(0) = \frac{2}{\sqrt[3]{3}} > 0$, deci $x_1 = 0$ este minim local şi $y''(-2) = -\frac{2}{3}$, deci $x_2 = -2$ este maxim local.

70. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei $y = y(x)$ definite implicit de ecuaţia $x^2 + y^2 - e^{2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}$, $y \neq 0$.
Soluţie
Condiţia de existenţă a funcţiei y este

$$y(x^2 + y^2) + xe^{2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}} \neq 0.$$

Se obţine

$$y' = \frac{2ye^{\operatorname{arctg}\frac{x}{y}} - x(x^2 + y^2)}{y(x^2 + y^2) + xe^{2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}};$$

punctele critice sunt:

$$x_1 = \sqrt{\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}}, x_2 = -\sqrt{\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}}.$$

În aceste puncte $y(x_1) = x_1$ şi $y(x_2) = x_2$. Se calculează $y''(x_{1,2})$, etc.

71. Să se calculeze $y'(1)$, y fiind definită implicit de $x^3 - y - \cos y = 0$.
Soluţie
Condiţia de existenţă este $\sin y - 1 \neq 0$; derivând relaţia dată, rezultă $y'(x) = \frac{3x^2}{1-\sin y}$.

72. Să se calculeze $y'(0)$ şi $y''(0)$, unde y este definită implicit de ecuaţia

$$e^{x^2-y^2} = \sin(x+2y) + 1.$$

Soluţie
Se derivează ecuaţia dată în raport cu x.

73. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi în punctul $(1,1)$ ale funcţiei z definite implicit de

$$2z = \sqrt{x^2+y^2}\ \operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Soluţie
Se derivează relaţia dată în raport cu x şi y.

74. Fie $G \in \mathcal{C}^\infty(R^3)$ şi fie $z = z(x,y)$ definită implicit de relaţia

$$z + G(x,y,z) = 0.$$

Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui z.
Soluţie
Derivând în raport cu x, se obţine:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

75. Să se calculeze $x'(0)$ şi $y'(0)$, funcţiile x şi y fiind definite implicit de sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} xy + 2y^2 + yz + x + y &= 1 \\ \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \ln(x^2+2y^2+z^2) &= \ln 2 \end{cases}.$$

Soluţie
Se derivează relaţiile date în funcţie de z.

76. Să se determine extremele următoarelor funcţii definite implicit:
a. $y = y(x)$, definită de $2yx^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$.
b. $y = y(x)$ definită de $\left(x^2+y^2\right)^2 = x^2 - y^2$.
c. $z = z(x,y)$, definită de $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$.
Soluţie
Aceeaşi metodă ca în exerciţiul 70.

4.6 Extreme cu legături

77. Să se determine extremele locale ale funcţiei $f(x,y,z) = xyz$ cu legătura $x+y+z=1$.

Soluţie

Se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange. Fie funcţiile $g(x,y,z) = x+y+z-1$ şi $F(x,y,z) = f+\lambda g = xyz+\lambda(x+y+z-1)$. Extremele cerute verifică sistemul:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial F}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} & = & 0 \\ g & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} yz+\lambda & = & 0 \\ xz+\lambda & = & 0 \\ xy+\lambda & = & 0 \\ x+y+z-1 & = & 0 \end{array}\right.$$

Soluţiile sistemului sunt:

pentru $\lambda_1 = -\frac{1}{9} \Rightarrow (x_1,y_1,z_1) = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

pentru $\lambda_2 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (x_2,y_2,z_2) & = & (1,0,0), \\ (x_3,y_3,z_3) & = & (0,1,0), \\ (x_4,y_4,z_4) & = & (0,0,1) \end{array}\right.$.

Pentru a decide natura celor patru puncte critice, se calculează diferenţiala a doua a funcţiei F:

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}dz^2+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}dxdz+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}dydz =$$

$$= 2\left(zdxdy+ydxdz+xdydz\right).$$

Pe legătură, avem $dg=0$, adică $dx+dy+dz=0$. Rezultă deci că restricţia lui d^2F la legătura $g=0$ este:

$$d^2F = 2((1-x-y)dxdy+ydx(-dx-dy)+xdy(-dx-dy)) =$$

$$= 2\left(-ydx^2-xdy^2+(1-2x-2y)dxdy\right).$$

În punctul $(x_1,y_1,z_1) = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ se obţine:

$$d^2F\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}\left(dx^2+dxdy+dy^2\right),$$

care este o formă pătratică negativ definită şi deci $(x_1,y_1,z_1) = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ este maxim local al funcţiei f cu legătura $g=0$.

Celelalte puncte nu sunt puncte de extrem; de exemplu, în $(1,0,0)$, rezultă

$d^2F(1,0,0) = -2dy^2 - 2dxdy$, care are valorile proprii $-1 \pm \sqrt{2}$, etc. Se poate studia şi semnul diferenţei $f(x,y,z) - f(1,0,0)$ într-o vecinătate a punctului $(1,0,0)$, restricţionată la planul $x+y+z=1$.

78. Să se calculeze valorile extreme ale funcţiei $f(x,y,z) = x+y+z$ restricţionate la $\Gamma = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 = 1,\ 2x+2y+z = 1\}$.

Soluţie

Intersecţia dintre sferă şi plan este un cerc deci o mulţime compactă. Funcţia f fiind continuă, rezultă că este mărginită (pe Γ) şi îşi atinge marginile. Există deci α şi β în Γ astfel încât $f(\alpha) = \inf\limits_{\Gamma} f$ şi $f(\beta) = \sup\limits_{\Gamma} f$. Pentru a determina aceste valori, se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Fie $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$, $h(x,y,z) = 2x+2y+z-1$
şi fie $F(x,y,z) = x+y+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(2x+2y+z-1)$.

Se determină punctele critice ale funcţiei F cu legăturile date:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = & 1+2\lambda x+2\mu = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = & 1+2\lambda y+2\mu = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = & 1+2\lambda z+\mu = & 0 \\ g = & x^2+y^2+z^2-1 = & 0 \\ h = & 2x+2y+z-1 = & 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{4} & \mu_1 = -\frac{1}{2} & (x_1,y_1,z_1) = (0,0,1) \\ \lambda_2 = \frac{1}{4} & \mu_2 = -\frac{11}{18} & (x_2,y_2,z_2) = \left(\frac{4}{9},\frac{4}{9},-\frac{7}{9}\right) \end{cases}.$$

Având numai două puncte critice, într-unul dintre ele funcţia va lua valoarea maximă, iar în celălalt, valoarea minimă. Se calculează $f(0,0,1) = 1$ (maxim) şi $f(\frac{4}{9},\frac{4}{9},-\frac{7}{9}) = \frac{1}{9}$ (minim).

79. Să se determine extremele globale ale funcţiei

$$f(x,y,z) = 2x^2+2y^2-xy+z^4-2z^2$$

pe mulţimea compactă $\Gamma = \{(x,y,z) | x^2+y^2+2z^2 \leq 8\}$.

Soluţie

Se determină mai întâi extremele locale ale lui f pe interiorul lui Γ (care este o mulţime deschisă), apoi se determină extremele lui f cu legătura $x^2+y^2+2z^2 = 8$.

Punctele critice ale lui f din mulţimea $\{(x,y,z) | x^2+y^2+2z^2 < 8\}$ sunt

soluţiile sistemului:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x} = & 4x-y= & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = & 4y-x= & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = & 4z^3-4z= & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (x_1,y_1,z_1) & = & (0,0,0) \\ (x_2,y_2,z_2) & = & (0,0,1) \\ (x_3,y_3,z_3) & = & (0.0-1) \end{array}\right.$$

Matricea hessiană într-un punct arbitrar este $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2-4 \end{pmatrix}$. În punctul $(0,0,0)$ matricea hessiană are şi valori proprii pozitive şi negative, deci originea nu este extrem local. În $(0,0,1)$ şi $(0,0,-1)$ matricea hessiană are toate valorile proprii pozitive, deci acestea sunt amândouă minime locale. Valoarea funcţiei în aceste puncte este $f(0,0,1)=f(0,0,-1)=-1$.
Se determină acum extremele locale ale lui f cu legătura

$$g(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2-8=0.$$

Fie $F(x,y,z)=2x^2+2y^2-xy+z^4-2z^2+\lambda(x^2+y^2+2z^2-8)$. Se rezolvă sistemul: $\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial F}{\partial x} = & 4x-y+2\lambda x= & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = & 4y-x+2\lambda y= & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = & 4z^3-4z+4\lambda z= & 0 \\ g= & x^2+y^2+2z^2-8= & 0 \end{array}\right.$

Din primele două ecuaţii rezultă $x=y$ sau $\lambda=-\frac{5}{2}$. Cazul $x=y$ conduce la soluţiile:
$\lambda_1=-3,(x_1,y_1,z_1)=(0,0,\pm 2)$,
$\lambda_{2,3}=-\frac{3}{2},(x_2,y_2,z_2)=\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}},\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right),(x_3,y_3,z_3)=\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}},\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.
În aceste puncte funcţia f ia valorile:
$f(0,0,\pm 2)=8,\ f\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}},\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}},\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=\frac{23}{4}$.
Cazul $\lambda=-\frac{5}{2}$ conduce la sistemul $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ x^2+y^2+2z^2 & = & 8 \\ z(2z^2-7) & = & 0 \end{array}\right.$ cu soluţiile:

$$(x_4,y_4,z_4)=(2,-2,0),\ (x_5,y_5,z_5)=(-2,2,0)$$

$(x_6,y_6,z_6)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\sqrt{\frac{7}{2}}\right)(x_7,y_7,z_7)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.
În aceste puncte funcţia f ia valorile:
$f(2,-2,0)=f(-2,2,0)=20$,
$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\sqrt{\frac{7}{2}}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\sqrt{\frac{7}{2}}\right)=\frac{33}{4}$.
Comparând valorile funcţiei f, rezultă că valoarea minimă a funcţiei (pe

mulţimea Γ) este $f(0,0,1) = f(0,0,-1) = -1$, iar valoarea maximă este $f(2,-2,0) = f(-2,2,0) = 20$.

80. Să se determine maximul şi minimul funcţiei

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1$$

pe mulţimea $K = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Soluţie
Funcţia îşi atinge marginile pe mulţimea K. Determinăm mai întâi extremele funcţiei pe mulţimea deschisă $\{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = & 2x - 3 = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = & 2y - 2 = & 0 \end{cases}$$

nu are soluţii în interiorul cercului unitate. Rezultă că valorile extreme se vor atinge pe cerc. Pentru a le determina, aflăm extremele funcţiei f cu legătura $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Funcţia lui Lagrange este

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

şi deci rezultă sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = & 2x - 3 + 2\lambda x = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = & 2y - 2 + 2\lambda y = & 0 \\ g(x,y) = & x^2 + y^2 - 1 \ = & 0 \end{cases}$$

Soluţiile sunt:
$\lambda_1 = -1 - \frac{\sqrt{13}}{2}$, $x_1 = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $y_1 = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$
$\lambda_2 = -1 + \frac{\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $y_2 = \frac{2\sqrt{13}}{13}$.
Calculând valorile funcţiei f în aceste puncte se obţin valorile extreme cerute.

81. Fie $D = \{(x,y) | x + y = 1\}$. Să se determine extremele locale ale funcţiei $f : D \mapsto R$, $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y$.
Soluţie
Se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange.
Fie legătura $g(x,y) = x + y - 1$ şi fie

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + \lambda(x + y - 1).$$

Sistemul $\left\{\begin{array}{rl} \frac{\partial F}{\partial x} = & 2x-1+\lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = & 2y-1+\lambda = 0 \\ g = & x+y-1=0 \end{array}\right.$ are soluţiile $\lambda = 0$, $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Matricea hessiană a funcţiei F (într-un punct arbitrar, deci şi pe D) este $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, deci punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ este minim local.

82. Să se determine punctele cele mai depărtate de origine care se găsesc pe suprafaţa de ecuaţie $4x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y + 4 = 0$.

Soluţie

Problema este echivalentă cu a găsi extremele funcţiei

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

cu legătura $g(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y + 4 = 0$.

83. Să se determine valorile extreme ale funcţiei

$$f : R^3 \mapsto R, f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$$

pe mulţimea $\{(x,y,z) \in R^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Soluţie

Se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange; fie

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \text{ şi } F(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z).$$

Sistemul $\left\{\begin{array}{rl} \frac{\partial F}{\partial x} = & 2(2+\lambda)x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = & 2(1+\lambda)y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = & 2(3+\lambda)z = 0 \\ g = & x^2+y^2+z^2-1=0 \end{array}\right.$ are soluţiile

$$\lambda_1 = -1,\ (x,y,z) \in \{(0,1,0); (0,-1,0)\},$$

$$\lambda_2 = -2,\ (x,y,z) \in \{(1,0,0); (-1,0,0)\},$$

$$\lambda_3 = -3,\ (x,y,z) \in \{(0,0,1); (0,0,-1)\}.$$

Sfera unitate este mulţime compactă, deci funcţia f işi atinge marginile; rezultă $f_{\min} = f(0,1,0) = 1$ şi $f_{\max} = f(0,0,1) = 3$.

84. Să se determine valorile extreme ale produsului xy când x şi y sunt coordonatele unui punct de pe elipsa de ecuaţie $x^2 + 2y^2 = 1$.

Soluţie

Problema este echivalentă cu a găsi valorile extreme ale funcţiei $f(x,y)=xy$ cu legătura $g(x,y)=x^2+2y^2-1$.
Considerăm funcţia $F(x,y)=xy+\lambda(x^2+2y^2-1)$. Din sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = & y+2\lambda x = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = & x+4\lambda y = & 0 \\ g = & x^2+2y^2-1 = & 0 \end{cases}$$

rezultă $\lambda=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.
Pentru $\lambda=\frac{\sqrt{2}}{4}$, rezultă:
$(x_1,y_1)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)$ şi $(x_2,y_2)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$.
Pentru $\lambda=-\frac{\sqrt{2}}{4}$, rezultă:
$(x_3,y_3)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$ şi $(x_4,y_4)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)$.
Valorile extreme ale funcţiei continue f pe elipsă (care este mulţime compactă) sunt: $f(x_1,y_1)=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ (minim) şi $f(x_3,y_3)=\frac{\sqrt{2}}{4}$ (maxim).

85. Fie $a,b,c\in R,\ a^2+b^2+c^2\neq 0$; să se determine valorile extreme ale funcţiei

$$f:R^3\mapsto R,\ f(x,y,z)=ax+by+cz,$$

pe mulţimea $D=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+y^2+z^2=r^2\}$.
Soluţie
Se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange.
Fie $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-r^2$ şi $F(x,y,z)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)$
Mulţimea D este compactă. Deoarece f este continuă, rezultă că f este îşi atinge marginile pe D. În concluzie, f are cel puţin un punct de minim global condiţonat de g şi un punct de maxim global condiţonat de g.
Sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = & a-2\lambda x = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = & b-2\lambda y = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = & c-2\lambda z = & 0 \\ g = & x^2+y^2+z^2-r^2 = & 0 \end{cases}$$

are soluţiile $\lambda=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2r}$, $(x,y,z)=\left(\frac{a}{2\lambda},\frac{b}{2\lambda},\frac{c}{2\lambda}\right)$.
Deoarece f are cel puţin două puncte de extrem globale pe D, deducem că valoarile extreme ale lui f sunt $\pm\, r\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

86. Să se determine extremele funcţiei

$$f:R^3\mapsto R, f(x,y,z)=xyz$$

pe mulţimea $\{(x,y,z) \in R^3 | x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=0\}$

Soluţie

Fie $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$, $h(x,y,z) = x+y+z$ şi
$F(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$

Sistemul $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = & yz+2\lambda x+\mu = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = & xz+2\lambda y+\mu = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = & xy+2\lambda z+\mu = & 0 \\ g = & x^2+y^2+z^2-1 = & 0 \\ h = & x+y+z = & 0 \end{cases}$ are soluţiile

$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right); \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right);$
$\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right); \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right); \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right).$

Se obţin trei puncte de minim în care f are valoarea $\frac{-1}{3\sqrt{6}}$ şi trei puncte de maxim în care f are valoarea $\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

87. Funcţia $z = z(x,y)$ este definită implicit de ecuaţia

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0.$$

Să se determine extremele locale ale lui z cu legătura $x=0$.

Soluţie

Fie $F(x,y,z) = z(x,y) + \lambda x$. Se obţine sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda &= \frac{1-x}{z-2} + \lambda \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{1+y}{z-2} \\ x &= 0 \\ x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10 &= 0 \end{cases}$$

Soluţiile sunt $(x_1,y_1,z_1) = (0,-1,2+\sqrt{15})$ şi $(x_2,y_2,z_2) = (0,-1,2-\sqrt{15})$. Calculându-se diferenţiala a doua a funcţiei F (pe legătură) se obţine

$$D^2F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dy^2.$$

Rezultă că funcţia z_1 are un maxim în $(0,-1)$ iar funcţia z_2 are un minim în $(0,-1)$.

88. Să se determine extremele funcţiei $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$ pe mulţimea $\{(x,y,z) \in R^3 \,|\, x^2+y^2+z^2=1\}$.

Soluţie

Funcţia f este continuă, iar mulţimea dată este compactă, deci există cel puţin doua puncte de extrem (în care f îşi atinge valorile extreme). Fie

$F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$; rezultă sistemul sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=3x^2+2\lambda x &= 0\\ \frac{\partial F}{\partial y}=3y^2+2\lambda y &= 0\\ \frac{\partial F}{\partial z}=3z^2+2\lambda z &= 0\\ x^2+y^2+z^2-1 &= 0 \end{cases}$$

Sistemul format din primele trei ecuaţii are soluţiile $x=y=z=0$ şi $x=y=z=-\frac{2}{3}\lambda$. Prima soluţie nu verifică ultima ecuaţie; cea de a doua, înlocuită în ultima ecuaţie dă $\lambda_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\lambda_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Se obţin soluţiile $x_1=y_1=z_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$ şi $x_2=y_2=z_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Calculând valorile funcţiei f în aceste puncte, rezultă valorile extreme ale lui f.

89. Să se calculeze extremele următoarelor funcţii pe mulţimile indicate:
a. $f(x,y)=e^{xy}$, $(x,y)\in R^2$, $x+y=3$.
b. $f(x,y,z)=x+y+z$, $(x,y,z)\in R^3$, $x^2+y^2+z^2=4, x-y+z=0$.
Soluţie
Se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

90. Să se determine valorile extreme ale funcţiei $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)-xy$ pe mulţimea $\{(x,y)\in R^2\,|\,x^2+y^2\le 16,\ y\ge 2\}$.
Soluţie
Se determină mai întâi extremele (libere) pe mulţimea deschisă

$$\{(x,y)\in R^2\,|\,x^2+y^2<16,\ y>2\}.$$

Apoi se rezolvă două probleme de extrem cu legături, legăturile fiind

$$x^2+y^2=16 \text{ şi respectiv } y=2.$$

91. Fie matricea (simetrică de ordinul n),

$$A=(a_{ij})_{ij},\ a_{ij}=a_{ji},\ \forall i,j\in\{1,2,...,n\}.$$

Să se determine valorile extreme ale funcţiei (formei pătratice)

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

pe sfera $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$.

Soluţie

Construim funcţia lui Lagrange

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2 - 1).$$

Rezultă sistemul:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial F}{\partial x_1} & = & \frac{\partial f}{\partial x_1} - 2\lambda x_1 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} & = & \frac{\partial f}{\partial x_2} - 2\lambda x_2 = 0 \\ ..... & & \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} & = & \frac{\partial f}{\partial x_n} - 2\lambda x_n = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} & = & 1 - (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) = 0 \end{array}\right.$$

Sistemul se scrie sub forma echivalentă:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & 0 \\ ..... & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n & = & 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 & = & 1 \end{array}\right.$$

Evident, sistemul liniar (format din primele n ecuaţii) are soluţii nenule dacă şi numai dacă λ este valoare proprie a matricei A (valorile proprii sunt reale deoarece A este matrice simetrică). În acest caz, pentru a calcula valorile extreme ale funcţiei f, se înmulţeşte prima ecuaţie de mai sus cu x_1, a doua cu x_2, ş.a.m.d., a n-a ecuaţie cu x_n şi se adună membru cu membru cele n relaţii obţinute; rezultă:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) = 0$$

În concluzie, pe sfera unitate are loc egalitatea $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \lambda$. Rezultă că valorile minimă şi maximă ale funcţiei f sunt cea mai mică şi (respectiv) cea mai mare valoare proprie ale matricei A.

Capitolul 5

Integrale improprii şi cu parametri

5.1 Noţiuni teoretice

Integrale improprii

Fie $a, b \in R$ şi fie $f : [a, b) \mapsto R$ o funcţie local integrabilă (integrabilă pe orice interval compact $[u, v] \subseteq [a, b)$). Integrala improprie (în b) $\int_a^b f(x)dx$ se numeşte convergentă dacă limita

$$\lim_{t \to b} \int_a^t f(x)dx$$

există şi este finită; altfel, integrala se numeşte divergentă.

Dacă $f : [a, \infty) \mapsto R$ este local integrabilă, atunci integrala improprie (la ∞) $\int_a^\infty f(x)dx$ se numeşte convergentă dacă limita

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx$$

există şi este finită.

Integrala improprie $\int_a^b f(x)dx$ (b poate fi şi ∞) se numeşte absolut convergentă dacă integrala $\int_a^b |f(x)|\, dx$ este convergentă.

Exemple

a. Fie $a \in (0, \infty)$ şi $\alpha \in R$. Atunci integrala $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ este convergentă dacă şi

numai dacă $\alpha > 1$.

b. Fie $a, b \in R,\ a < b$ şi $\alpha \in R$. Atunci integrala $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha < 1$.

Demonstraţie

a. Fie $\alpha \neq 1$; atunci:

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) < \infty \text{ dacă şi numai dacă } \alpha > 1.$$

Dacă $\alpha = 1$, atunci:

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln a) = \infty.$$

b. Analog.

Criterii de convergenţă

Criteriul lui Cauchy

Fie $f : [a, b) \mapsto R$, local integrabilă; atunci integrala $\int\limits_a^b f(t)dt$ este convergentă dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists\, b_\varepsilon \in [a, b)$ astfel încât $\forall x, y \in (b_\varepsilon, b)$ să rezulte $\left| \int\limits_x^y f(t)dt \right| < \varepsilon$.

Criteriul de comparaţie

Fie $f, g : [a, b) \mapsto R$, (b poate fi şi ∞) astfel încât $0 \leq f \leq g$;

i. dacă integrala $\int\limits_a^b g(x)dx$ este convergentă, atunci şi integrala $\int\limits_a^b f(x)dx$ este convergentă.

ii. dacă integrala $\int\limits_a^b f(x)dx$ este divergentă, atunci şi integrala $\int\limits_a^b g(x)dx$ este divergentă.

Criteriul de comparaţie la limită

Fie $f, g : [a, b) \mapsto [0, \infty)$ astfel încât există limita:

$$\ell = \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

i. Dacă $\ell \in [0, \infty)$ şi $\int\limits_a^b g(x)dx$ este convergentă, atunci şi $\int\limits_a^b f(x)dx$ este convergentă.

ii. Dacă $\ell \in (0, \infty)$ sau $\ell = \infty$ şi $\int\limits_a^b g(x)dx$ este divergentă, atunci şi

$\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Criteriul de comparaţie cu $\dfrac{1}{x^\alpha}$

Fie $a \in R$ şi $f : [a, \infty) \mapsto [0, \infty)$, local integrabilă astfel încât există

$$\ell = \lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x).$$

i. Dacă $\alpha > 1$ şi $0 \leq \ell < \infty$, atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă.

ii. Dacă $\alpha \leq 1$ şi $0 < \ell \leq \infty$, atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă.

Criteriul de comparaţie cu $\dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$

Fie $a < b$ şi $f : [a, b) \mapsto [0, \infty)$, local integrabilă astfel încât există

$$\ell = \lim_{x\to b}(b - x)^\alpha f(x).$$

i. Dacă $\alpha < 1$ şi $0 \leq \ell < \infty$, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

ii. Dacă $\alpha \geq 1$ şi $0 < \ell \leq \infty$, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

Criteriul lui Abel

Fie $f, g : [a, \infty) \mapsto R$ cu proprietăţile:
f este de clasă $\mathcal{C}^1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\int_a^\infty f'(x)dx$ absolut convergentă,
g este continuă, iar funcţia $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ este mărginită pe $[a, \infty)$.
Atunci integrala $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ este convergentă.

Integrale cu parametri

Fie $A \neq \emptyset$ şi $[a, b] \subset R$ un interval compact. Fie $f : [a, b] \times A \mapsto R$ o funcţie (de două variabile reale) astfel încât pentru orice $y \in A$ aplicaţia $[a, b] \ni x \mapsto f(x, y) \in R$ este integrabilă Riemann. Funcţia definită prin:

$$F : A \mapsto R,\ F(y) = \int_a^b f(x, y)dx,$$

se numeşte integrală cu parametru.

Continuitatea integralei cu parametru

Dacă $f : [a, b] \times A \mapsto R$ este continuă, atunci integrala cu parametru $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ este funcţie continuă.

Formula lui Leibniz de derivare

Fie $f : [a, b] \times (c, d) \mapsto R$ o funcţie continuă astfel încât derivata parţială $\frac{\partial f}{\partial y}$ există şi este continuă pe $[a, b] \times (c, d)$. Atunci integrala cu parametru $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ este derivabilă şi

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx, \ \forall\, y \in (c, d).$$

Formula generală de derivare

Fie $f : [a, b] \times (c, d) \mapsto R$ o funcţie continuă astfel încât derivata parţială $\frac{\partial f}{\partial y}$ există şi este continuă pe $[a, b] \times (c, d)$ şi fie $\varphi,\ \phi : (c, d) \mapsto [a, b)$ două funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$. Atunci funcţia $G(y) = \int_{\varphi(y)}^{\phi(y)} f(x, y)dx$ este derivabilă şi:

$$G'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\phi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx + f(\phi(y), y)\phi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y), \ \forall\, y \in (c, d).$$

Schimbarea ordinei de integrare

Fie $f : [a, b] \times [c, d] \mapsto R$ o funcţie continuă; atunci:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

Integrale improprii cu parametri

Fie $f : [a, b) \times A \mapsto R$ o funcţie cu proprietatea că pentru orice $y \in A$, aplicaţia $[a, b) \ni x \mapsto f(x, y) \in R$ este local integrabilă şi integrala (improprie) $\int_a^b f(x, y)dx$ converge. Se poate defini în acest caz funcţia

$$F(x, y) = \int_a^b f(x, y)dx,$$

numită integrală improprie cu parametru.
Integrala $\int_a^b f(x,y)dx$ se numeşte uniform convergentă (în raport cu y) pe mulţimea A dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, b_\varepsilon \in (a,b) \text{ astfel încât } \left| \int_t^b f(x,y)dx \right| < \varepsilon,\ \forall\, t \in (b_\varepsilon, b),\ \forall y \in A.$$

Continuitatea integralei improprii cu parametru
Dacă $f : [a,b) \times A \mapsto R$ este continuă şi dacă integrala $\int_a^b f(x,y)dx$ este uniform convergentă pe A, atunci funcţia $F : A \mapsto R,\ F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ este continuă.
Derivarea integralei improprii cu parametru
Fie $f : [a,b) \times (c,d) \mapsto R$ o funcţie continuă astfel încât derivata parţială $\frac{\partial f}{\partial y}$ există şi este continuă pe $[a,b) \times (c,d)$ şi pentru orice $y \in (c,d)$ fixat integrala $\int_a^b f(x,y)dx$ este convergentă. Dacă integrala $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ este uniform convergentă pe (c,d), atunci integrala improprie cu parametru $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ este derivabilă şi

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx,\ \forall\, y \in (c,d).$$

Schimbarea ordinei de integrare în integrala improprie
Dacă $f : [a,b) \times [c,d] \mapsto R$ este continuă şi dacă integrala $\int_a^b f(x,y)dx$ este uniform convergentă pe (c,d), atunci :

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

Criterii de uniform convergenţă
Criteriul lui Cauchy
Fie $f : [a,b) \times A \mapsto R$ o funcţie cu proprietatea că pentru orice $y \in A$, aplicaţia $[a,b) \ni x \mapsto f(x,y) \in R$ este local integrabilă. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:
i. integrala improprie $\int_a^b f(x,y)dx$ este uniform convergentă pe A.

ii. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists b_\varepsilon \in (a,b)$ astfel încât pentru orice $u, v \in (b_\varepsilon, b)$ rezultă

$$\left| \int_u^v f(x,y)dx \right| < \varepsilon, \forall\, y \in A.$$

Criteriul de comparaţie
Fie $f : [a,b) \times A \mapsto R$ o funcţie cu proprietatea că pentru orice $y \in A$, aplicaţia $[a,b) \ni x \mapsto f(x,y) \in R$ este local integrabilă şi fie $g : [a,b) \mapsto R$ astfel încât $|f(x,y)| \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a,b)$, $\forall\, y \in A$. Dacă integrala $\int_a^b g(x)dx$ este convergentă, atunci integrala $\int_a^b f(x,y)dx$ este uniform convergentă.

Funcţiile lui Euler
Fie Γ şi B funcţiile (integralele) lui Euler:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \alpha > 0,$$

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, p > 0, q > 0.$$

Proprietăţile uzuale ale funcţiilor Γ şi B
a. $\Gamma(1) = 1$.
b. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
c. $B(p,q) = B(q,p)$.
d. $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, \forall \alpha \in (0,1)$.
e. $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.
f. $B(p,q) = \int\limits_0^\infty \dfrac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$.
g. $\Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in N$.
h. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
i. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = 1 \cdot 3 \cdot 5....(2n-1) \cdot 2^{-n}\sqrt{\pi}$.

5.2 Integrale improprii

Aplicand criteriile de comparaţie cu $\dfrac{1}{x^\alpha}$ şi $\dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$, să se studieze natura integralelor următoare (exerciţiile 1-10):

1. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Soluţie

$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$, deci integrala este divergentă.

2. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Soluţie

$\lim_{x\to 1}(1-x)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, deci integrala este convergentă.

3. $\int_0^1 \frac{\sin x}{1-x^2} dx$.

Soluţie

$\lim_{x\to 1} (1-x)\frac{\sin x}{1-x^2} = \frac{\sin 1}{2}$, deci integrala este divergentă.

Următoarele integrale sunt improprii în ambele capete.

4. $\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^3-1}} dx$.

Soluţie

$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{x^3-1}} = 1$, deci integrala este divergentă, (deşi în $x = 1$ integrala este convergentă).

5. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x^3-1}} dx$.

Soluţie

Integrala este convergentă: $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3-1}} = 0$, $\lim_{x\to\infty} x^{1,1} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3-1}} = 0$.

6. $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}-1}$.

Soluţie

$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x\sqrt{x}-1} = 1$, deci integrala este convergentă la infinit, dar este divergentă în $x = 1$: $\lim_{x\to 1} (x-1)\frac{1}{x\sqrt{x}-1} = \frac{3}{2}$,
deci integrala este divergentă.

7. $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{x^{2n}e^{-x}}{\sqrt{1+x}}dx, n \in N.$

Soluţie

Integrala este convergentă pentru orice $n \in N$:

$$\lim_{x\to -1}(1+x)^{\frac{1}{2}}\frac{x^{2n}e^{-x}}{\sqrt{1+x}} = e,$$

$$\lim_{x\to \infty} x^2\frac{x^{2n}e^{-x}}{\sqrt{1+x}} = 0.$$

8. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}, \alpha > 0.$

Soluţie

Cu schimbarea de variabilă $\ln x = u$, obţinem integrala $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{du}{u^{\alpha}}$, care este divergentă pentru orice $\alpha > 0$.

9. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^m - 1}{\ln x}dx, m \in N - \{0\}.$

Soluţie

Integrala este convergentă:

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{2}}\frac{x^m-1}{\ln x} = 0,$$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^{\frac{1}{2}}\frac{x^m-1}{\ln x} = 0.$$

10. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\text{arctg}(ax)}{x^m}dx, a > 0, m \in N - \{0\}.$

Soluţie

Dacă $m = 1$, integrala este divergentă; dacă $m > 1$, integrala este convergentă.

11. Să se arate că integrala $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

Soluţie
Convergenţa (la ∞) rezultă aplicând criteriul lui Abel: $f(x) = \frac{1}{x}$ şi $g(x) = \sin x$. În 0 integrala este convergentă deoarece funcţia $\frac{\sin x}{x}$ se poate prelungi prin continuitate.

Presupunem acum prin absurd ca integrala $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ ar fi absolut convergentă. Atunci, din inegalitatea:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} = \sin^2 x \leq |\sin x|,$$

ar rezulta (aplicând criteriul de comparaţie) că integrala $\int_0^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x}\, dx$ este convergentă; de aici, ar rezulta (întrucât integrala $\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{2x}\, dx$ este convergentă, conform criteriului lui Abel), că şi integrala $\int_0^\infty \frac{1}{2x}\, dx$ ar fi convergentă, ceea ce constituie o contradiţie.

5.3 Integrale cu parametri

12. Să se studieze continuitatea funcţiei

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{1+x^2} dx, \forall\, y \in R.$$

Soluţie
Fie $f(x,y) = \frac{\sin xy}{1+x^2}$, $(x,y) \in [0,\infty) \times R$. Evident, f este funcţie continuă. Demonstrăm acum că integrala (improprie) cu parametru

$$\int_0^\infty f(x,y)dx$$

este uniform convergentă în raport cu y pe R şi deci funcţia F este continuă. Evident, are loc inegalitatea:

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{1+x^2},\ \forall\, (x,y) \in [0,\infty) \times R.$$

Integrala improprie $\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ este convergentă şi deci, conform criteriului de comparaţie, integrala dată este uniform convergentă.

13. Fie $f : [0,1] \times (0,\infty) \mapsto R$, $f(x,y) = \frac{x}{y^2}\ e^{-\left(\frac{x}{y}\right)^2}$ şi fie integrala parametru $F(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$. Să se calculeze:

i. $\lim\limits_{y\to 0} \int_0^1 f(x,y)$,

ii. $\int_0^1 \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\,dx$.

Soluţie

i. Pentru orice $y > 0$, avem:

$$F(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = -\frac{1}{2}e^{-\left(\frac{x}{y}\right)^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{y^2}}.$$

În consecinţă, rezultă: $\lim\limits_{y\to 0} \int_0^1 f(x,y) = \frac{1}{2}$.

ii. Pe de altă parte: $\int_0^1 \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$.

14. Fie $f(x,y) = \begin{cases} \ln\sqrt{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \in [0,1]\times(0,\infty) \\ \ln x & \text{dacă} \quad (x,y) \in (0,1]\times\{0\} \end{cases}$

şi fie $F(y) = \begin{cases} \int_0^1 f(x,y)dx & \text{dacă} \quad y > 0 \\ -1 & \text{dacă} \quad y = 0 \end{cases}$

i. Să se demonstreze că funcţia F este continuă.

ii. Să se calculeze $F'(0)$.

iii. Să se calculeze $\int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)\,dx$.

Soluţie

i. Pentru orice $y > 0$, integrând prin părţi, obţinem:

$$F(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = x\ln\sqrt{x^2+y^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+y^2}dx =$$

$$= \ln\sqrt{1+y^2} - 1 + y\cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{y}.$$

Pentru $y = 0$, obţinem $F(0) = \int_0^1 f(x,0)dx = \int_0^1 (-1)dx = -1$.

Funcţia F este continuă în 0:

$$\lim_{y\to 0_+} F(y) = \lim_{y\to 0_+} \ln\sqrt{1+y^2} - 1 + y\cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{y} = -1.$$

ii. Derivata $F'(0)$ se calculează cu definiţia:

$$F'(0) = \lim_{y\to 0_+} \frac{F(y)-F(0)}{y} = \lim_{y\to 0_+} \left(\frac{1}{y}\ln\sqrt{1+y^2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{y}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

iii. Pentru orice $x \in (0,1]$, avem:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{y\to 0_+} \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2} - \ln x}{y} = \lim_{y\to 0_+} \frac{\ln\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y}{x^2} = 0.$$

Rezultă $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)dx = 0.$

15. Fie $f : [0,\infty)\times[0,1] \mapsto R$, $f(x,y) = ye^{-xy}$ şi fie integrala cu parametru $F(y) = \displaystyle\int_0^\infty f(x,y)dx$, $\forall\, y \in [0,1]$. Să se studieze continuitatea funcţiei F.

Soluţie

Evident, $F(0) = 0$; pentru orice $y \in (0,1]$, avem:

$$F(y) = \int_0^\infty ye^{-xy}dx = -e^{-xy}\Big|_0^\infty = 1,$$

deci F nu este continuă în 0.

16. Fie $\alpha > 0$. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}dx$.

Soluţie

Considerăm integrala (cu parametrul $y > 0$):

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx.$$

Sunt verificate ipotezele teoremei de derivare sub integrală şi obţinem:

$$F'(y) = \int_0^\infty -e^{-yx}\sin x dx = -\frac{1}{y^2+1}.$$

Rezultă deci $F(y) = -\text{arctg}y + \frac{\pi}{2}$; în concluzie:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{y \to 0} F(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Se arată simplu (printr-o schimbare de variabilă) că:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \, \forall \, \alpha > 0.$$

Analog, dacă $\alpha < 0$, atunci $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = -\frac{\pi}{2}$.

17. Fie $\alpha, \beta \in R$; să se calculeze $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x \cdot \cos \beta x}{x} dx$.

Soluţie

Se transformă produsul $\sin \alpha x \cdot \cos \beta x$ în sumă şi apoi se aplică rezultatul din exerciţiul anterior.

18. Să se calculeze integrala $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$, folosind integrala cu parametru $F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2} dx, \alpha > 0$.

Soluţie

Prin derivare în raport cu α, obţinem:

$$F'(\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)} + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \text{arctg}\alpha.$$

Primitivele acestei funcţii sunt: $\frac{1}{2}$ arctg $\alpha \ln(1+\alpha^2) + k, k \in R$. Dar $F(0) = 0$ şi deci $k = 0$. Rezultă $J = F(1) = \frac{\pi}{8} \ln 2$.

19. Să se calculeze integrala:

$$F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + y^2 \sin^2 x) dx, \, \forall y > 0.$$

Soluţie

Dacă $y = 1$, atunci, evident, $F(1) = 0$.

Fie $y > 0$, $y \neq 1$; atunci:

$$F'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2y \sin^2 x}{\cos^2 x + y^2 \sin^2 x} dx = 2y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{tg}^2 x}{1 + y^2 \text{tg}^2 x} dx =$$

$$= 2y \int_0^\infty \frac{u^2}{(1+y^2u^2)(1+u^2)} du =$$

$$= \frac{2y}{1-y^2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+y^2u^2} - \frac{1}{1+u^2} \right) = \frac{\pi}{1+y}.$$

Rezultă $F(y) = \pi \ln(1+y) + k$, unde k este o constantă ce se determină din condiţia $F(1) = 0$; se obţine $k = -\pi \ln 2$, şi deci $F(y) = \pi \ln \frac{1+y}{2}$.

20. Pentru orice $a > 0, b > 0$, să se calculeze $J = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \cos(\ln x) dx$.

Soluţie

Integrala J se poate scrie şi sub forma:

$$J = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \cos(\ln x) dx = \int_0^1 \cos(\ln x) \left(\int_a^b x^y dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_0^1 x^y \cos(\ln x) dx \right) dy.$$

Vom calcula mai întâi integrala: $J_1 = \int_0^1 x^y \cos(\ln x) dx$, folosind schimbarea de variabilă: $t = \ln x$;obţinem: $J_1 = \frac{y+1}{1+(y+1)^2}$, şi deci $J = \frac{1}{2} \ln \frac{1+(b+1)^2}{1+(a+1)^2}$.

21. Să se calculeze integralele:

$J(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{arctg}(\alpha \text{tg} x)}{\text{tg} x} dx, \alpha > 0, \alpha \neq 1$ şi $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\text{tg} x} dx$.

Soluţie

$J'(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\alpha^2 \text{tg}^2 x}$. Pentru a calcula ultima integrala facem schimbarea de variabilă $t = \text{tg} x$; în final obţinem $J(\alpha) = \frac{\pi}{2} \ln(1+\alpha)$ şi $I = \frac{\pi}{2} \ln 2$.

22. Să se calculeze integralele:

a. $F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x} \right) \frac{dx}{\cos x}, |a| < 1.$

b. $G(a) = \int_0^\infty \frac{\text{arctg}(ax)}{x(1+x^2)} dx, a \in R, |a| \neq 1.$

Soluţie

a. $F'(a)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1-a^2\cos^2 x}dx$; cu schimbarea de variabilă $t=\mathrm{tg}x$, obţinem:

$$F'(a)=\int_0^{\infty}\frac{2}{t^2+(\sqrt{1-a^2})^2}dt=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{1-a^2}}\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

şi deci $F(a)=\pi\arcsin a$.

b. $G'(a)=\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+a^2x^2)}=\frac{\pi}{2(1+a)}$ şi deci $G(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$.

23. Să se calculeze integralele:

a. $J(a,b)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\ln(a^2+x^2)}{b^2+x^2}dx, a>0, b>0, a\neq b.$

b. $F(a)=\int\limits_0^{1}\frac{\ln\left(1-a^2x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx, |a|<1.$

Soluţie

a. Derivând în raport cu a, obţinem:

$$J'=\int_0^{\infty}\frac{2a}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}dx=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{2a}{b^2-a^2}(\frac{1}{a^2+x^2}-\frac{1}{b^2+x^2})dx=\frac{\pi}{b(a+b)}.$$

Rezultă deci $J=\frac{\pi}{b}\ln(a+b)+K(b)$. Pentru a calcula $K(b)$, calculăm

$$J(b,b)=\int_0^{\infty}\frac{\ln(b^2+x^2)}{b^2+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(b^2+b^2\mathrm{tg}^2t)}{b^2+b^2\mathrm{tg}^2t}b(1+\mathrm{tg}^2t)dt=$$

$$=\frac{1}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{b^2}{\cos^2 t}dt=\frac{\pi}{b}\ln b-\frac{2}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t dt.$$

Ultima integrală se poate calcula cu schimbarea de variabilă $t=\frac{\pi}{2}-y$ şi se obţine

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t dt=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Rezultă $J(b,b)=\frac{\pi}{b}\ln(2b)$ şi deci $K(b)=0$.

b. Derivând în raport cu a, obţinem:

$$F'(a)=\int_0^{1}\frac{-2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2a}{1-a^2\sin^2 t}dt = -\frac{2a}{1-a^2}\int_0^{\infty} \frac{du}{u^2+(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}})^2} = -\frac{a\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

deci $F(a) = \pi\sqrt{1-a^2} + k$; dar $F(0) = 0$, deci $F(a) = \pi(\sqrt{1-a^2} - 1)$.

24. Să se calculeze integrala:

$$J(a) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ a \in R.$$

Soluţie
Derivata funcţiei J este:

$$J'(a) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1+a^2\sin^2 t)\,\cos t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{du}{1+(1+a^2)\,u^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}.$$

Rezultă:

$$J(a) = \frac{\pi}{2}\,\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right) + C,$$

constanta C calculându-se din $J(0) = 0$. În final se obţine:

$$J(a) = \ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right).$$

25.Formula lui Froullani
Fie $0 < a < b$ şi fie $f : [0,\infty) \mapsto R$ o funcţie continuă şi mărginită astfel încât integrala $\int_1^{\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ este convergentă. Să se demonstreze egalitatea:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = f(0)\ln\frac{a}{b}.$$

Soluţie
Vom demonstra mai întâi egalitatea:

$$\int_u^{\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t}dt\ ,\ \forall u > 0.\ (*)$$

Fie $u > 0$; cu schimbarea de variabilă $bx = t$, obţinem:

$$\int_u^{\infty} \frac{f(bx)}{x}dx = \int_{bu}^{\infty} \frac{f(t)}{t}dt.$$

Analog, se demonstrează şi egalitatea:

$$\int_u^\infty \frac{f(ax)}{x}dx = \int_{au}^\infty \frac{f(t)}{t}dt.$$

Prin scăderea membru cu membru a celor două egalităţi rezultă egalitatea $(*)$. Demonstrăm acum formula lui Froullani; folosind egalitatea $(*)$, avem:

$$\int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \lim_{u\to 0}\int_u^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \lim_{u\to 0}\int_{bu}^{au}\frac{f(t)}{t}dt.$$

Pentru a calcula ultima integrală considerăm funcţia

$$h(u) = \sup_{t\in[au,bu]} |f(t)-f(0)|.$$

Din continuitatea funcţiei f, rezultă $\lim\limits_{u\to 0} h(u) = 0$. Evident, avem:

$$\int_{bu}^{au}\frac{f(t)}{t}dt = \int_{bu}^{au}\frac{f(t)-f(0)}{t}dt + \int_{bu}^{au}\frac{f(0)}{t}dt.$$

Prima integrală tinde la 0 pentru $u \mapsto 0$:

$$\left|\int_{bu}^{au}\frac{f(t)-f(0)}{t}dt\right| \le \int_{bu}^{au}\frac{|f(t)-f(0)|}{t}dt \le$$

$$\le \int_{bu}^{au}\frac{h(u)}{t}dt = h(u)\ln\frac{a}{b} \mapsto 0 \text{ atunci când } u \mapsto 0.$$

În concluzie:

$$\int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \lim_{u\to 0}\int_{bu}^{au}\frac{f(t)}{t}dt = \lim_{u\to 0}\int_{bu}^{au}\frac{f(0)}{t}dt = f(0)\ln\frac{a}{b}.$$

26. Fie $0 < a < b$; să se calculeze integralele:

a. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx.$

b. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}dx.$

Soluţie

Se aplică formula lui Froullani.

27. Să se calculeze, folosind funcţiile Γ şi B, integralele:

a. $\int_0^{\infty} e^{-x^p} dx, p > 0.$

b. $\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(x+1)^2} dx.$

c. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}\, dx.$

Soluţie

a. Cu schimbarea de variabilă $x^p = y$,obţinem:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^p} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{p} y^{\frac{1-p}{p}} e^{-y} dy = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right).$$

În cazul particular $p = 2$, obţinem:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

b. Folosind proprietăţile funcţiilor lui Euler, obţinem:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(x+1)^2} dx = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

c. Cu schimbarea de variabilă $x^3 = y$,obţinem:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} \frac{y^{-\frac{2}{3}}}{1+y} dy = \frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

28. Să se calculeze integralele:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x\, dx, p > -1, q > -1.$

b. $\int_0^{1} x^{p+1}(1-x^m)^{q-1}\, dx, p > 0, q > 0, m > 0.$

c. $\int_0^{\infty} x^p e^{-x^q}\, dx, p > -1,\ q > 0.$

d. $\int\limits_0^1 \ln^p\left(\frac{1}{x}\right)dx, p > -1.$

e. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}}, n \in N.$

Soluţie

a. Cu schimbarea de variabilă $\sin^2 x = y$, obţinem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{p-1}{2}}(1-y)^{\frac{q-1}{2}}dy = \frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right).$$

b. Cu schimbarea de variabilă $x^m = y$, obţinem:

$$\int_0^1 x^{p+1}(1-x^m)^{q-1}dx = \frac{1}{m}B\left(\frac{p+2}{m}, q\right).$$

c. Cu schimbarea de variabilă $x^q = y$, obţinem:

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^q}dx = \frac{1}{q}\int_0^\infty y^{\frac{p+1}{q}-1}e^{-y}dy = \frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right).$$

d. Cu schimbarea de variabilă $\ln(\frac{1}{x}) = y$, obţinem:

$$\int_0^1 \ln^p\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_0^\infty y^p e^{-y}dy = \Gamma(p+1).$$

e. Cu schimbarea de variabiă $x^n = y$, obţinem:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}\int_0^1 y^{\frac{1}{n}-1}(1-y)^{-\frac{1}{n}}dy = \frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

29. Să se calculeze integrala $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos x dx.$

Soluţie

Folosind dezvoltarea în serie de puteri (în jurul lui 0) a funcţiei cos şi teorema de integrare termen cu termen a seriilor de puteri, obţinem:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos x dx = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n}dx =$$

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^\infty \frac{1}{2}y^{n-\frac{1}{2}}e^{-y}dy = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{4}\right)^{-n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{1}{4}}.$$

30. Să se calculeze în funcţie de B integralele:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} \text{ şi } J = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}.$$

Soluţie
Pentru I se face schimbarea de variabilă $x = t^{\frac{1}{3}}$; rezultă:

$$I = \frac{1}{3} \int_0^1 t^{-\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} \, dt = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right).$$

Pentru calculul lui J se face schimbarea de variabilă $x = t^{-\frac{1}{3}}$; rezultă:

$$J = \frac{1}{3} \int_0^1 t^{-\frac{5}{6}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} \, dt = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right).$$

31. Să se calculeze integralele lui Fresnel:

$$I = \int_0^\infty \cos x^2 dx \text{ şi } J = \int_0^\infty \sin x^2 dx.$$

Soluţie
Convergenţa celor două integrale rezultă din criteriul lui Abel şi cu schimbarea de variabilă $x^2 = y$. Calculăm acum:

$$J - iI = \int_0^\infty e^{-ix^2} dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $x^2 = -it^2$ şi folosind relaţia $\Gamma(1) = 1$, obţinem $I = J = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Capitolul 6

Măsură şi integrală

6.1 Noţiuni teoretice

Spaţii măsurabile
Fie X o mulţime nevidă şi fie $\mathcal{P}(X)$ mulţimea părţilor lui X. O submulţime $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se numeşte $\sigma-$ algebră pe X dacă verifică următoarele proprietăţi:
i. $X \in \mathcal{A}$.
ii. dacă $A \in \mathcal{A}$ atunci $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
iii. dacă $A_n \in \mathcal{A}$, $\forall n \in N$ atunci $\cup_{n\in N} A_n \in \mathcal{A}$.
În acest caz $(X, \mathcal{A})$ se numeşte spaţiu măsurabil iar elementele σ-algebrei $\mathcal{A}$ se numesc mulţimi măsurabile.

Dacă $\mathcal{A}$ este o σ-algebră pe X, atunci:
i. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
ii. dacă $A, B \in \mathcal{A}$ atunci $A \bigcup B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$.
iii. dacă $A_n \in \mathcal{A}$, $\forall n \in N$ atunci $\bigcap\limits_{n\in N} A_n \in \mathcal{A}$.
iv. dacă $(\mathcal{A})_{i\in J}$ sunt σ-algebre pe X atunci intersecţia $\bigcup\limits_{i\in J} \mathcal{A}_i$ este σ-algebră pe X.

Dacă $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ atunci σ-algebra generată de $\mathcal{C}$ se notează $\mathcal{A}_\mathcal{C}$ şi este definită prin

$$\mathcal{A}_\mathcal{C} = \bigcap\{\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \text{ este } \sigma - \text{algebră pe } X, \text{ şi } \mathcal{B} \supseteq \mathcal{C}\}.$$

Dacă (Y, d) este un spaţiu metric, atunci σ-algebra mulţimilor Boreliene pe Y este σ-algebra generată de familia mulţimilor deschise din Y.
În cazul particular $Y = R$, σ-algebra mulţimilor Boreliene (pe R) coincide

cu σ-algebra generată de oricare din următoarele tipuri de intervale:
$\mathcal{C}_1 = \{(-\infty, b) \,|\, b \in R\}$
$\mathcal{C}_2 = \{(a, \infty) \,|\, a \in R\}$
$\mathcal{C}_3 = \{(a, b) \,|\, a, b \in R\}$,
deoarece orice mulţime deschisă din R este reuniune cel mult numărabilă de intervale deschise.

Funcţii măsurabile

Fie $(X, \mathcal{A})$ un spaţiu cu măsură şi (Y, d) un spaţiu metric; o aplicaţie $f : X \mapsto Y$ se numeşte măsurabilă dacă $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, $\forall B$ mulţime Borel-iană din Y.

Dacă $A \subseteq X$, atunci funcţia caracteristică $\chi_A : X \mapsto R$ este măsurabilă dacă şi numai dacă $A \in \mathcal{A}$.

O aplicaţie $s : X \mapsto R$ se numeşte simplă (sau etajată) dacă mulţimea $s(X)$ este finită, sau, echivalent, dacă există $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{P}(X)$ şi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$ astfel încât $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$. Evident, s este măsurabilă dacă şi numai dacă mulţimile $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt măsurabile.

Are loc următorul rezultat de aproximare:

Orice funcţie măsurabilă şi pozitivă este limita punctuală a unui şir crescător de funcţii simple măsurabile şi pozitive.

Spaţii cu măsură

Fie $(X, \mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil; o aplicaţie

$$\mu : \mathcal{A} \mapsto [0, \infty]$$

se numeşte măsură (pe X) dacă:

i. $\mu(\emptyset) = 0$

ii. pentru orice $(A_n)_{n \in N} \subseteq \mathcal{A}$ astfel încât $A_n \cap A_m = \emptyset$, $\forall n \neq m$ rezultă

$$\mu\left(\bigcup_{n \in N} A_n\right) = \sum_{n \in N} \mu\left(A_n\right).$$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ se numeşte spaţiu cu măsură. Proprietatea **ii** de mai sus se numeşte numărabil-aditivitate.

Dacă $(X, \mathcal{A}, \mu)$ este un spaţiu cu măsură, atunci:

i. $\forall\, A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B \;\Rightarrow\; \mu(A) \leq \mu(B)$. (monotonie).

ii. pentru orice $(A_n)_{n \in N} \subseteq \mathcal{A}$ rezultă

$$\mu\left(\bigcup_{n \in N} A_n\right) \leq \sum_{n \in N} \mu\left(A_n\right) \quad \text{(numărabil-subaditivitate)}.$$

Egalitate aproape peste tot
O mulţime măsurabilă $A \in \mathcal{A}$ se numeşte de măsură nulă dacă $\mu(A) = 0$.
Două funcţii măsurabile se numesc egale aproape peste tot (se notează $f = g\,(a.p.t.)$) dacă mulţimea $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ este de măsură nulă.
Relaţia de egalitate aproape peste tot este relaţie de echivalenţă pe mulţimea funcţiilor măsurabile.

Funcţii integrabile

Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi $s : X \mapsto [0, \infty]$, $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ o funcţie simplă, pozitivă, măsurabilă. Integrala lui s în raport cu măsura μ este, prin definiţie:

$$\int_X s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

Dacă $f : X \mapsto [0, \infty]$ este o funcţie măsurabilă pozitivă atunci integrala lui f în raport cu măsura μ este:

$$\int_X f d\mu = \sup\{\int_X s d\mu \mid s \text{ funcţie simpla măsurabilă, } 0 \leq s \leq f\}.$$

Dacă $f : X \mapsto [0, \infty]$ este o funcţie măsurabilă pozitivă şi dacă $A \in \mathcal{A}$, atunci integrala lui f pe mulţimea A în raport cu măsura μ este:

$$\int_A f d\mu = \int_X f \cdot \chi_A d\mu.$$

Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură; o funcţie măsurabilă $f : X \mapsto C$ se numeşte integrabilă dacă $\int_X |f| d\mu < \infty$.
Mulţimea funcţiilor integrabile este spaţiu vectorial cu operaţiile uzuale de adunare şi inmulţire cu scalari.

Fie $f : X \mapsto C$ o funcţie integrabilă; atunci $f = u + iv$, unde u şi v sunt funcţii măsurabile reale; descompunând $u = u^+ - u^-$, $v = v^+ - v^-$ (aici u^+, v^+ şi u^-, v^- sunt părţile pozitive şi respectiv negative ale lui u şi v), atunci integrala lul f în raport cu măsura μ este

$$\int_X f d\mu = \int_X u^+ d\mu - \int_X u^- d\mu + i \left(\int_X v^+ - \int_X v^- d\mu \right).$$

Integrala astfel definită are proprietăţile:
i. $\int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$, $\forall f, g$ integrabile şi $\forall\, \alpha, \beta \in C$.

ii. $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$, $\forall\, f$ integrabilă.

Teorema de convergenţă monotonă a lui Lebesgue

Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi fie $f_n : X \mapsto [0, \infty]$ un şir crescător de funcţii măsurabile: $f_n \leq f_{n+1}$, $\forall n \in N$. Dacă f este limita punctuală a şirului f_n, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

În particular, dacă $f_n : X \mapsto [0, \infty]$, atunci:

$$\int_X \sum_{n\in N} f_n d\mu = \sum_{n\in N} \int_X f_n d\mu.$$

Teorema de convergenţă dominată a lui Lebesgue

Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi fie $f_n : X \mapsto C$ un şir de funcţii măsurabile cu proprietăţile:

i. f_n converge punctual la funcţia f.

ii. există g o funcţie integrabilă astfel încât $|f_n| \leq g$.

Atunci f este funcţie integrabilă şi $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Spaţii de funcţii p-integrabile

Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi fie $1 \leq p < \infty$. Considerăm mulţimea:

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) = \{f : X \mapsto C \mid f \text{ măsurabilă şi } \int_X |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Evident, pentru $p = 1$ se obţine mulţimea funcţiilor integrabile.

$\mathcal{L}^p(X, \mu)$ este spaţiu vectorial, iar aplicaţia

$$\| f \|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

este o seminormă pe $\mathcal{L}^p(X, \mu)$. Din relaţia $\| f \|_p = 0$ rezultă $f = 0$ (a.p.t.); fie $L^p(X, \mu)$ mulţimea claselor de echivalenţă în raport cu relaţia de egalitate a.p.t. Atunci $(L^p(X, \mu), \| \ \|_p)$ este spaţiu normat (spaţiul funcţiilor p-integrabile). În plus, se demonstrează că $(L^p(X, \mu), \| \ \|_p)$ este spaţiu Banach.

Exemple de spaţii de funcţii integrabile

i. Dacă pe mulţimea numerelor naturale, N, se consideră măsura de numărare (a se vedea exerciţiul 1 din acest capitol), atunci, în acest caz, spaţiul funcţiilor p-integrabile este spaţiul şirurilor p-absolut sumabile (a se vedea şi exemplele de spaţii normate din capitolul 2):

$$\ell^p(N) = \{x : N \mapsto C \ \mid \ \sum_{n\in N} |x(n)|^p < \infty\}.$$

Analog se defineşte spaţiul $\ell^p(Z)$ al şirurilor bilaterale p-absolut sumabile; evident, norma în aceste cazuri este:

$$\| x \|_p = \left(\sum_{n \in N} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall x \in \ell^p(N).$$

ii. Dacă pe mulţimea numerelor reale, R, se consideră măsura Lebesgue (construcţia acestei măsuri se găseşte în capitolul următor), atunci notăm:

$$L^p(R) = \{ f : R \mapsto C \ \mid \ f \text{ măsurabilă şi } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty \}.$$

Norma în acest caz este

$$\| f \|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall f \in L^p(R).$$

Analog, se pot considera intervale $(a, b) \subset R$ şi se obţin spaţiile $L^p(a, b)$ corespunzătoare.

iii. Un caz particular remarcabil este spaţiul funcţiilor periodice (de perioadă 2π definite pe R) de pătrat integrabil, definit după cum urmează; dacă $\mathcal{P}$ este mulţimea funcţiilor periodice $f : R \mapsto C$, f de perioadă 2π, $f(x) = f(x + 2\pi), \forall x \in R$, atunci:

$$L^2[0, 2\pi] = \{ f \in \mathcal{P} \ \mid \ f \text{ măsurabilă şi } \int_0^{2\pi} |f(t)| dt < \infty \},$$

integrala fiinds în raport cu măsura Lebesgue. Evident, în locul intervalului $[0, 2\pi]$ se poate lua orice interval de lungime 2π; o altă alegere uzuală este intervalul $[-\pi, \pi]$. Norma pe spaţiul $L^2[0, 2\pi]$ este:

$$\| f \|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt}, \ \forall f \in L^2[0, 2\pi].$$

Analog se defineşte spaţiul funcţiilor periodice (de perioadă 2π) integrabile:

$$L^1[0, 2\pi] = \{ f \in \mathcal{P} \ \mid \ f \text{ măsurabilă şi } \int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt \ < \ \infty \}.$$

Norma pe spaţiul $L^1[0, 2\pi]$ este:

$$\| f \|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt, \ \forall f \in L^1[0, 2\pi].$$

Spaţiul funcţiilor esenţial mărginite
Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi fie $f : X \mapsto [0, \infty]$ o funcţie măsurabilă; considerăm mulţimea

$$M = \{t \in R \mid \mu\left(f^{-1}(t, \infty]\right) = 0\}.$$

Prin definiţie, supremumul esenţial al lui f este:

$$\text{esssup} f = \infty \text{ dacă } M = \emptyset \text{ şi esssup} f = \inf M \text{ dacă } M \neq \emptyset.$$

Notăm $\| f \|_\infty = \text{esssup}|f|$; funcţia f se numeşte esenţial mărginită dacă $\| f \|_\infty < \infty$. Mulţimea funcţiilor esenţial mărginite se notează $L^\infty(X, \mu)$ şi este spaţiu Banach cu norma $\| \ \|_\infty$.
Şi în acest caz putem particulariza spaţiul cu măsură $(X, \mathcal{A}, \mu)$, obţinându-se (ca mai sus) spaţiile $(\ell^\infty(N), \| \ \|_\infty)$, $(L^\infty(R), \| \ \|_\infty)$, $(L^\infty[0, 2\pi], \| \ \|_\infty)$.

Spaţii Hilbert şi serii Fourier
Fie H un spaţiu vectorial (complex sau real); o aplicaţie

$$<, >: H \times H \mapsto C \text{ (respectiv } R)$$

se numeşte produs scalar dacă pentru orice $x, y, z \in H$ şi orice $\alpha, \beta \in C$ sunt adevărate relaţiile:
i. $< \alpha\, x + \beta\, y, z > = \alpha\ < x, z > + \beta\ < y, z >$;
ii. $< x, y > = \overline{< y, x >}$;
iii. $< x, x > \geq 0$;
iv. $< x, x > = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Perechea $(H, <, >)$ se numeşte spaţiu cu produs scalar.

Aplicaţia $\| \ \| : H \mapsto H$, $\| \ x \ \| = \sqrt{< x, x >}$ este normă pe H şi verifică inegalitatea lui Schwarz:

$$| < x, y > | \ \leq \| \ x \ \| \ \| \ y \ \|, \forall\, x, y \in H.$$

Reciproc, un spaţiu normat $(H, \| \ \|)$ este spaţiu cu produs scalar dacă şi numai dacă este verificată legea paralelogramului:

$$\| \ x + y \ \|^2 + \| \ x - y \ \|^2 = 2\left(\| \ x \ \|^2 + \| \ y \ \|^2\right), \forall x, y \in H.$$

Spaţiul $(H, <, >)$ se numeşte spaţiu Hilbert dacă orice şir Cauchy este convergent (spaţiul normat $(H, \| \ \|)$ este complet).
În cele ce urmează $(H, <, >)$ este un spaţiu Hilbert.

Exemple de spaţii Hilbert
i. Spaţiul Banach C^n (cu norma euclidiană) este spaţiu Hilbert cu produsul scalar:

$$< x, y >= \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j},$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ vectori din C^n. Analog şi pentru R^n.
ii. Spaţiul Banach al şirurilor de pătrat sumabil,

$$\ell^2(N) = \{x : N \mapsto C \mid \sum_{n \in N} |x(n)|^2 < \infty\}$$

este spaţiu Hilbert cu produsul scalar:

$$< x, y >= \sum_{n \in N} x(n)\overline{y(n)},$$

pentru orice şiruri $x, y \in \ell^2(N)$. Analog şi pentru spaţiul şirurilor bilaterale (definite pe Z), $\ell^2(Z)$.
iii. Dintre toate spaţiile de funcţii p-integrabile, $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, numai spaţiul funcţiilor de pătrat integrabil, $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ este spaţiu Hilbert, produsul scalar fiind:

$$< f, g >= \int_X f\,\overline{g}\,d\mu,\ \forall\, f, g \in\ L^2(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Ortogonalitate
Doi vectori $x, y \in H$ se numesc ortogonali (sau perpendiculari; notăm $x \perp y$) dacă $< x, y >= 0$. Ortogonalul unei mulţimi nevide $M \subseteq H$ este, prin definiţie, mulţimea (subspaţiul închis) $M^{\perp} = \{x \in H \mid x \perp y,\ \forall y \in M\}$.
Următorul rezultat este esenţial în studiul spaţiilor Hilbert:
Teorema proiecţiei
Fie H un spaţiu Hilbert şi fie $M \subseteq H$ o mulţime nevidă, înhisă şi convexă. Atunci există un unic vector $x_M \in M$ astfel încât

$$\| x_M \| = \inf\{\| x \| \ \mid x \in M\}.$$

O consecintă importantă este generalizarea descompunerii după direcţii perpendiculare din geometria euclidiană:
Descompunerea ortogonală
Fie $K \subseteq$ un subspaţiu închis şi fie $K^{\perp}$ ortogonalul său. Atunci, pentru vector $x \in H$ există (şi sunt unici) $y \in K$ şi $z \in K^{\perp}$ astfel încât $x = y + z$.

Baze ortonormale, serii Fourier
Fie H un spaţiu Hilbert; o submulţime $\mathcal{B} = \{\varepsilon_i\}_{i\in J}$ se numeşte bază ortonormală în H dacă:
i. $< \varepsilon_i, \varepsilon_j >= \delta_{ij}$ (simbolul lui Kronecker), $\forall i, j \in J$;
ii. subspaţiul vectorial generat de $\mathcal{B}$ este dens în H.
Spaţiul Hilbert H se numeşte separabil dacă admite baze ortonormale cel mult numărabile. În continuare vom considera numai spaţii Hilbert separabile.

Fie H un spaţiu Hilbert (separabil), fie $\mathcal{B} = \{\varepsilon_n\}_{n\in N}$ o bază ortonormală (fixată) şi fie $x \in H$ un vector fixat; coeficienţii Fourier ai lui x (în baza $\mathcal{B}$) sunt $\widehat{x}_n =< x, \varepsilon_n >, \forall n \in N$, iar seria $\sum_{n\in N} \widehat{x}_n\varepsilon_n$ se numeşte seria Fourier asociată lui x. Aplicaţia

$$H \ni x \mapsto (\widehat{x}_n)_n \in \ell^2(N)$$

se numeşte transformarea Fourier (pe spaţiul H).
Proprietăţile seriei Fourier
i. Pentru orice $x \in H$, seria Fourier asociată, $\sum_{n\in N} \widehat{x}_n\varepsilon_n$, converge la x;
ii. $\| x \|^2 = \sum_{n\in N} |\widehat{x}_n|^2$ (identitatea lui Parseval);
iii. transformarea Fourier este un izomorfism (izometric) de spaţii Hilbert.

Serii trigonometrice
Un caz particular remarcabil de serie Fourier este seria trigonometrică. Considerăm spaţiul Hilbert al funcţiilor periodice (de perioadă 2π) de pătrat integrabil (a se vedea exemplele de spaţii p-integrabile):

$$L^2[0, 2\pi] = \{f : [0, 2\pi] \mapsto C \mid f \text{ măsurabilă şi } \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty\}.$$

Produsul scalar este

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt,$$

iar norma $\| f \|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$.
Pentru orice $n \in Z$, fie $\omega_n(t) = e^{int}$. Un rezultat clasic de analiză afirmă că mulţimea (sistemul trigonometric) $\mathcal{B} = \{\omega_n \mid n \in Z\}$ este bază ortonormală în $L^2[0, 2\pi]$. Pentru orice funcţie $f \in L^2[0, 2\pi]$, coeficienţii Fourier (în

raport cu baza fixată mai sus), sunt

$$\widehat{f}_n =< f, \omega_n >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt, \forall n \in Z,$$

iar seria Fourier (sau seria trigonometrică) asociată funcţiei f este $\sum_{n\in Z}\widehat{f}_n\omega_n$; sumele parţiale ale seriei, $P_n = \sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}_k\omega_k$, se numesc polinoame trigonometrice şi $\lim_{n\to\infty} P_n = f$ în spaţiul $L^2[0, 2\pi]$, sau, echivalent:

$$\lim_{n\to\infty} \parallel P_n - f \parallel_2 = 0.$$

Identitatea lui Parseval devine în acest caz:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt = \parallel f \parallel_2^2 = \sum_{n\in Z} |\widehat{f}_n|^2.$$

Folosind egalitatea $e^{int} = \cos nt + i \sin nt, \forall t \in R$, seria Fourier asociată funcţiei f se poate scrie sub forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

unde coeficienţii trigonometrici (clasici) a_n şi b_n sunt:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos ntdt,\ \forall\, n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin ntdt,\ \forall\, n \geq 1.$$

Legătura dintre coeficienţii $\widehat{f}_n, a_n$ şi b_n este:

$$\widehat{f}_0 = \frac{a_0}{2},\ \widehat{f}_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ \widehat{f}_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2},\ \forall\, n = 1, 2, ...$$

Lema lui Riemann afirmă că dacă funcţia f este integrabilă, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

În legătură cu convergenţa punctuală a seriei Fourier, are loc următorul rezultat clasic:

Teorema lui Dirichlet
Dacă $f : R \mapsto R$ este o funcţie periodică de perioadă 2π, măsurabilă, mărginită, având cel mult un număr finit de discontinuităţi de speţa intâi şi având derivate laterale în orice punct, atunci seria Fourier asociată funcţiei f converge în fiecare punct $x \in R$ la

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)).$$

În particular, dacă funcţia f este continuă (şi verifică celelalte ipoteze din teorema lui Dirichlet), atunci are loc descompunerea:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Convergenţa uniformă a seriei Fourier
Condiţii suficiente pentru convergenţa uniformă a seriei Fourier sunt date în teorema următoare:

Dacă $f : R \mapsto C$ este o funcţie continuă, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni şi periodică de perioadă 2π, atunci seria sa Fourier este absolut şi uniform convergentă, iar suma este f.

Numărul $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$ este media semnalului f, primul termen

$$a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

este oscilaţia principală (în jurul valorii medii), iar termenul

$$a_n \cos nt + b_n \sin nt,\ n \geq 2$$

este armonica de ordinul n a funcţiei f. Perioada armonicei de ordinul n este $\frac{2\pi}{n}$, iar amplitudinea $A_n = \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$; conform lemei lui Riemann rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$.

În cazul în care funcţia f are perioada $T = 2\ell$, $(\ell > 0)$, atunci toate rezultatele de mai sus sunt în continuare adevărate, cu adaptările corespunzătoare; baza ortonormală este

$$\{\epsilon_n \mid n \in Z\},\ \text{cu } \epsilon_n(x) = e^{i\frac{n\pi x}{\ell}},$$

iar coeficienţii Fourier sunt:

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2\ell}\int_0^{2\ell} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{\ell}}dx,\ \forall\, n \in Z,$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx,\ \forall\, n = 0, 1, 2, ...,$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell},\ \forall\, n = 1, 2, ...$$

Teorema lui Dirichlet se scrie:

$$\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}_n e^{i\frac{n\pi x}{\ell}},\ \forall\, x \in R.$$

Identitatea lui Parseval devine acest caz:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell}|f(t)|^2\,dt.$$

Evident, toate rezultatele de mai sus rămân adevărate dacă înlocuim intervalul $[0, 2\ell]$ cu orice alt interval de lungime 2ℓ, de exemplu, $[-\ell, \ell]$.

Serii de sinusuri şi cosinusuri

Fie $f : [0, \ell] \mapsto R$, o funcţie integrabilă şi fie $\tilde{f} : R \mapsto R$, periodică de perioadă 2ℓ, definită prin:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in [0, \ell] \\ f(-x) & , \quad x \in (-\ell, 0) \end{cases}$$

Dacă funcţia $\tilde{f}$ satisface condiţiile teoremei lui Dirichlet, atunci, dezvoltând $\tilde{f}$ în serie Fourier, rezultă:

$$\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{\pi n x}{\ell},\ \forall\, x \in (0, \ell),$$

$$f(0+0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ f(\ell - 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n,$$

coeficienţii a_n fiind coeficienţii Fourier reali asociaţi funcţiei $\tilde{f}$.

Formula de mai sus se numeşte dezvoltarea în serie de cosinusuri a lui f.

Analog, dacă funcţia (impară):

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in [0, \ell] \\ -f(-x) & , \quad x \in (-\ell, 0) \end{cases}$$

satisface condiţiile teoremei lui Dirichlet, atunci dezvoltarea în serie de sinusuri a funcţiei f este:

$$\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{\ell},\ \forall\, x\in(0,\ell),$$

coeficienţii b_n fiind coeficienţii Fourier reali asociaţi funcţiei $\tilde{f}$.

Operatori pe spaţii Hilbert

Acestă secţiune continuă paragraful din capitolul 2 referitor la operatori liniari şi continui pe spaţii normate.

În continuare $(H,<,>)$ este un spaţiu Hilbert, iar $\mathcal{L}(H)$ este spaţiul Banach al operatorilor liniari şi continui pe H. În legătură cu dualul unui spaţiu Hilbert, are loc următorul rezultat:

Teorema lui Riesz

i. Pentru orice $y\in H$, aplicaţia

$$f_y:H\mapsto C,\ f_y(x)=<x,y>$$

este funcţională liniară şi continuă.

ii. Reciproc, dacă f este o funcţională liniară şi continuă pe H, atunci există $y\in H$ astfel încât $f=f_y$.

Adjunctul unui operator

Pentru orice $T\in\mathcal{L}(H)$, se demonstrează că există un unic operator $T^\star\in\mathcal{L}(H)$ astfel încât:

$$<Tx,y>=<x,T^\star y>,\ \forall x,\ y\in H.$$

Proprietăţile lui $T^\star$ (numit adjunctul lui T) sunt:

i. $(\alpha T+\beta\, S)^\star=\overline{\alpha}T^\star+\overline{\beta}\,S^\star$, $\forall\alpha,\ \beta\in C$, $\forall T,\ S\in\mathcal{L}(H)$.

ii. $(T^\star)^\star=T$, $\forall\, T\in\mathcal{L}(H)$.

iii. $(TS)^\star=S^\star T^\star$, $\forall T,S\in\mathcal{L}(H)$.

iv. $\parallel T^\star T\parallel=\parallel T\parallel^2$, $\forall\, T\in\mathcal{L}(H)$.

v. Dacă $T\in\mathcal{L}(H)$ este inversabil, atunci $(T^{-1})^\star=(T^\star)^{-1}$.

Fie $T\in\mathcal{L}(H)$ un operator fixat. T se numeşte autoadjunct dacă $T=T^\star$; operatorul T se numeşte unitar dacă este inversabil şi $T^{-1}=T^\star$; operatorul T se numeşte normal dacă $TT^\star=T^\star T$.

6.2 Funcţii integrabile

1. Să se demonstreze că următoarele aplicaţii sunt măsuri:

a. Fie $X\neq\emptyset$, fie $\mathcal{P}(X)$ mulţimea părţilor lui X şi fie $a\in X$, un element

arbitrar fixat. Măsura Dirac concentrată în punctul a este, prin definiţie:

$$\delta_a : \mathcal{P}(X) \mapsto [0,\infty),\ \delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad a \in A \\ 0 & \text{dacă} \quad a \notin A \end{cases}$$

b. Măsura de numărare pe X este, prin definiţie:

$$\mu_c : \mathcal{P}(X) \mapsto [0,\infty],\ \mu_c(A) = \begin{cases} \text{card}A & \text{dacă} \quad A \text{ este finită} \\ \infty & \text{dacă} \quad A \text{ este infinită} \end{cases}$$

c. Presupunem în plus că mulţimea X este finită. Măsura de probabilitate pe X este, prin definiţie:

$$P : \mathcal{P}(X) \mapsto [0,1],\ P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(X)}.$$

d. Un exemplu remarcabil de măsură este măsura Lebesgue (pe spaţiul R^n); construcţia ei este dată în capitolul următor.

Soluţie

Se verifică direct axiomele măsurii.

2.a. Fie δ_a măsura Dirac (cf. exerciţiului 1) şi fie $f : X \mapsto R$. Să se demonstreze că:

$$\int_X f d\delta_a = f(a).$$

b. Fie μ_c măsura de numărare (cf. exerciţiului 1) pe N şi fie $f : N \mapsto R$. Să se demonstreze că

$$\int_N f d\mu_c = \sum_{n \in N} f(n),$$

în ipoteza că seria din membrul drept are o sumă (eventual ∞).

c. Fie P măsura de probabilitate (cf exerciţiului 1) şi fie $f : X \mapsto R$. Să se demonstreze că

$$\int_X f dP = \frac{\sum_{x \in X} f(x)}{\text{card}(X)}.$$

Soluţie

Se aplică definiţia integralei, (mai întâi pentru funcţii simple).

3. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi fie $f : X \mapsto [0,\infty)$ o funcţie măsurabilă. Să se demonstreze că dacă $\int_X f d\mu = 0$, atunci $f = 0$ (a.p.t.).

Soluţie
Pentru orice $n \in N$, fie

$$A_n = \{x \in X \ ; \ f(x) > \frac{1}{n}\}.$$

Mulţimile A_n sunt măsurabile pentru că $A_n = f^{-1}\left((\frac{1}{n}, \infty)\right)$. Mai mult, avem:

$$\bigcup_{n \in N} A_n = \{x \in X \ ; \ f(x) \neq 0\}.$$

Vom demonstra că $\mu(A_n) = 0, \forall n \in N$. Integrând pe A_n inegalitatea:

$$\frac{1}{n} < f(x), \forall x \in A_n,$$

obţinem (folosim şi $f(x) \geq 0$):

$$\frac{1}{n}\,\mu(A_n) \leq \int_{A_n} f d\mu \leq \int_X f d\mu = 0,$$

deci $\mu(A_n) = 0, \forall n \in N$. Avem deci:

$$\mu(\{x \in X \ ; \ f(x) \neq 0\}) = \mu(\bigcup_{n \in N} A_n) \leq \sum_{n \in N} \mu(A_n) = 0.$$

4. Fie $(a_{ij})_{i,j \in N}$ un şir dublu indexat astfel încât $a_{ij} \geq 0, \forall i, j \in N$. Să se demonstreze că:

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} a_{ij} = \sum_{j \in N} \sum_{i \in N} a_{ij}.$$

Facem menţiunea că membrii egalităţii pot fi şi ∞.
Soluţie
Vom aplica teorema de convergenţă monotonă. Considerăm spaţiul cu măsură (N, μ_c) şi şirul de funcţii

$$f_i : N \mapsto [0, \infty), \ f_i(j) = a_{ij}.$$

Atunci, conform teoremei de convergenţă monotonă, avem:

$$\int_N \sum_{i \in N} f_i d\mu_c = \sum_{i \in N} \int_N f_i d\mu_c,$$

adică (aplicând exerciţiul 2(b)):

$$\sum_{j\in N}\sum_{i\in N} a_{ij} = \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} a_{ij}.$$

5. Funcţii convexe, inegalitatea lui Jensen
O funcţie $\phi : (a,b) \mapsto R$ se numeşte convexă dacă:

$$\phi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\phi(x) + \lambda\phi(y), \forall x, y \in (a,b),\ \forall \lambda \in [0,1],$$

sau, echivalent:

$$\frac{\phi(t)-\phi(s)}{t-s} \leq \frac{\phi(u)-\phi(t)}{u-t},\ \forall a < s < t < u < b.$$

Se demonstrează fără dificultate că o funcţie convexă pe un interval deschis este continuă. Un exemplu remarcabil de funcţie convexă pe R este funcţia exponenţială, $\phi(x) = e^x$.

Inegalitatea lui Jensen Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură astfel încât $\mu(X) = 1$ şi fie $a, b \in \overline{R},\ a < b$. Atunci, pentru orice funcţie integrabilă $f : X \mapsto (a,b)$ şi pentru orice funcţie convexă $\phi : (a,b) \mapsto R$, are loc inegalitatea:

$$\phi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X (\phi \circ f) d\mu.$$

Soluţie
Fie $t = \int_X f d\mu \in R$ şi fie $\alpha = \sup\limits_{s\in[a,t]} \dfrac{\phi(t)-\phi(s)}{t-s}$. Propunem ca exerciţiu inegalitatea:

$$\phi(s) \geq \phi(t) + \alpha(s-t), \forall s \in (a,b).$$

În particular, pentru $s = f(x)$, obţinem:

$$\phi(f(x)) \geq \phi(t) + \alpha(f(x)-t), \forall x \in X.$$

Integrând ultima inegalitate pe X în raport cu măsura μ, obţinem:

$$\int_X (\phi \circ f) d\mu \geq \int_X \phi(t) d\mu + \alpha\left(\int_X f d\mu - t\right),$$

adică:

$$\int_X (\phi \circ f) d\mu \geq \phi\left(\int_X f d\mu)\right).$$

6. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ca în exerciţiul 5 şi fie $f : X \mapsto R,\ g : X \mapsto [0, \infty)$, două funcţii integrabile; să se demonstreze inegalităţile:
a. $e^{\int_X f\, d\mu} \leq \int_X e^f\, d\mu$.
b. $e^{\int_X \ln g\, d\mu} \leq \int_X g\, d\mu$.
Soluţie
Se aplică inegalitatea lui Jensen funcţiei convexe $\phi(t) = e^t$.

7. Inegalitatea mediilor
Fie $n \in N$. Să se demonstreze că pentru orice numere reale nenegative $x_1, x_2, ..., x_n$, are loc inegalitatea mediilor:

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot ...x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Soluţie
Evident, putem presupune că $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt strict pozitive.
Fie $X = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ o mulţime cu n elemente şi fie
$P : \mathcal{P}(X) \mapsto [0, \infty)$, măsura de probabilitate, deci

$$P(\{p_j\}) = \frac{1}{n}, \forall j = 1, 2, ..., n.$$

Fie $f : X \mapsto R, f(p_j) = \ln x_j$ şi fie $\phi(x) = e^x$. Aplicând inegalitatea lui Jensen (sau exerciţiul 6a), obţinem:

$$e^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(p_j)} \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n e^{f(p_j)},$$

adică $(x_1 \cdot x_2 \cdot ...x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

8. Inegalitatea lui Holder
Fie $p > 0$ şi $q > 0$ astfel încât $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$; p şi q se numesc în acest caz conjugate.
a. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură. Atunci, pentru orice funcţii măsurabile $f, g : X \mapsto [0, \infty)$, are loc inegalitatea lui Holder:

$$\int_X fg\, d\mu \leq \left(\int_X f^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

b. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ şi $b_1, b_2, ..., b_n$ numere reale pozitive; atunci:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \leq (a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + b_2^q + ... + b_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Soluţie

a. Fie $A = \left(\int_X f^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ şi $B = \left(\int_X g^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$. Dacă $A = \infty$ sau $B = \infty$, atunci inegalitatea este evidentă. Dacă $A = 0$ sau $B = 0$, atunci, conform exerciţiului 3, $f = 0(a.p.t.)$ sau $g = 0\,(a.p.t.)$ şi deci $fg = 0\,(a.p.t.)$ şi inegalitatea este iarăşi evidentă. Presupunem acum $A, B \in (0, \infty)$; fie $F = \frac{f}{A}$ şi $G = \frac{g}{B}$. Fie $x \in X$; deoarece $F(x) > 0$ şi $G(x) > 0$, există $s, t \in R$ astfel încât $F(x) = e^{\frac{s}{p}}$ şi $G(x) = e^{\frac{t}{q}}$. Folosind convexitatea funcţiei exponenţiale, avem:

$$F(x)G(x) = e^{\frac{1}{p}\,s\,+\,\frac{1}{q}\,t} \leq \frac{1}{p}\,e^s + \frac{1}{q}\,e^t = \frac{1}{p}\,F^p(x) + \frac{1}{q}\,G^q(x).$$

Integrând ultima inegalitate, obţinem:

$$\int_X FG \, d\mu \leq \frac{1}{p}\int_X F^p \, d\mu + \frac{1}{q}\int_X G^q \, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ceea ce încheie demonstraţia.

b. Se aplică inegalitatea lui Holder pentru un spaţiu de probabilitate (a se vedea demonstraţia de la inegalitatea mediilor).

9. Inegalitatea lui Minkovski

Fie $p > 1$ şi fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură; pentru orice funcţii măsurabile $f, g : X \mapsto [0, \infty)$, are loc inegalitatea:

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Cazul particular $p = 2$ este cunoscut sub numele de inegalitatea lui Schwarz.

Soluţie

Integrând egalitatea:

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1},$$

obţinem:

$$\int_X (f+g)^p = \int_X f(f+g)^{p-1} d\mu + \int_X g(f+g)^{p-1} \, d\mu.$$

Aplicând inegalitatea lui Holder celor doi termeni din membrul drept al egalităţii de mai sus, obţinem (alegem q conjugat cu p):

$$\int_X f(f+g)^{p-1}d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q}d\mu\right)^{\frac{1}{q}}, \text{şi}$$

$$\int_X g(f+g)^{p-1}d\mu \leq \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q}d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Însumând cele două inegalităţi şi folosind egalitatea $(p-1)q = p$, obţinem inegalitatea:

$$\int_X (f+g)^p d\mu \leq \left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right) \quad (*).$$

Folosind convexitatea funcţiei putere cu exponent supraunitar, $\phi(t) = t^p$, obţinem:

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(f^p + g^p),$$

ceea ce arată că dacă membrul stâng al inegalităţii $(*)$ este ∞, atunci şi membrul drept este ∞. Putem deci presupune că $\int_X (f+g)^p d\mu < \infty$. Demonstraţia se încheie împărţind inegalitatea $(*)$ cu $\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$.

10. Să se studieze convergenţa punctuală, uniformă şi în norma $\|\cdot\|_1$ a şirului de funcţii

$$f_n : [0,1] \mapsto R,\ f_n(x) = \frac{1}{1+nx}.$$

Soluţie
Fie $f(x) = 0, \forall x \in (0,1]$ şi $f(0) = 1$. Atunci f_n converge punctual la f , dar nu converge uniform; în norma $\|\cdot\|_1$, şirul f_n converge la funcţia nulă:

$$\| f_n \|_1 = \int_0^1 |f_n(x)|dx = \frac{1}{n}\ln(1+n) \to 0.$$

11. Să se demonstreze incluziunile:

$$\ell^1(Z) \subset \ell^2(Z) \text{ şi } L^2[0,2\pi] \subset L^1[0,2\pi].$$

Soluţie
Incluziunile rezultă din următoarele două inegalităţi:

$$\| x \|_2 \leq \| x \|_1,\ \forall x \in \ell^2(Z) \text{ şi}$$

$$\| f \|_1 \leq \| f \|_2, \ \forall f \in L^1[0, 2\pi].$$

Prima inegalitate este evidentă:

$$\| x \|_2^2 = \sum_{n \in Z} |x(n)|^2 \ \leq \ \left(\sum_{n \in Z} |x(n)| \right)^2 = \| x \|_1^2 .$$

Pentru cea de-a doua inegalitate să obsevăm mai întâi că funcţia constantă $\mathbf{1}(t) = 1$ este şi în $L^1[0, 2\pi]$ şi în $L^2[0, 2\pi]$:

$$\| \mathbf{1} \|_1 = \| \mathbf{1} \|_2 = 1.$$

Fie acum $f : [0, 2\pi] \mapsto C$ o funcţie măsurabilă (şi periodică). Aplicăm inegalitatea lui Holder (exerciţiul 8) funcţiilor $|f|$ şi $\mathbf{1}$; obţinem:

$$\| f \|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| \, \mathbf{1}(t) \, dt \ \leq$$

$$\leq \ \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} |\mathbf{1}(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \| f \|_2 .$$

12. Fie $L^1(R)$ spaţiul Banach al funcţiilor integrabile pe R în raport cu măsura Lebesgue şi fie $f \in L^1(R)$.
a. Să se demonstreze că pentru orice $t \in R$, funcţia $h(x) = e^{-itx} f(x)$ este în spaţiul $L^1(R)$.
Putem defini deci:

$$\widehat{f} : R \mapsto C, \ \widehat{f}(t) = \int_R e^{-ixt} f(x) \, dx.$$

Funcţia $\widehat{f}$ se numeşte transformata Fourier a funcţiei f; să se demonstreze următoarele proprietăţi:
b. Dacă $\phi(x) = f(x)e^{isx}$, atunci $\widehat{\phi}(t) = \widehat{f}(t - s)$, $\forall s, t \in R$.
c. Dacă $\psi(x) = f(x - s)$, atunci $\widehat{\psi}(t) = \widehat{f}(t)e^{-ist}$, $\forall s, t \in R$.
d. Dacă $\eta(x) = \overline{f(-x)}$, atunci $\widehat{\eta}(t) = \overline{\widehat{f}(t)}, \forall \, t \in R$.
Soluţie
a. Cu notaţiile din enunţ:

$$\| h \|_1 = \int_R |e^{-ixt} \, f(x)| \, dt = \| f \|_1 < \infty,$$

deci $h \in L^1(R)$.
b. Fie $s, t \in R$; atunci:

$$\widehat{\psi}(t) = \int_R e^{-ixt} f(x) e^{ixs} \, dx = \int_R e^{-ix(t-s)} \, f(x) \, dx = \widehat{f}(t - s).$$

c. Pentru orice $t, s \in R$ avem:

$$\widehat{\psi}(t) = \int_R e^{-ixt} f(x-s)\, dx = \int_R e^{-i(s+u)t} f(u)\, du =$$

$$= e^{-ist} \int_R e^{-iut} f(u)\, du = e^{-ist}\, \widehat{f}(t),$$

unde, în prima integrală s-a făcut schimbarea de variabilă $x - s = u$.
d. Pentru orice $t \in R$ avem:

$$\widehat{g}(t) = \int_R e^{-ixt}\, \overline{f(-x)}\, dx =$$

$$= \overline{\int_R e^{ixt} f(-x)\, dx} = \overline{\int_R e^{-ixt} f(x)\, dx} = \overline{\widehat{f}(t)}.$$

13. Fie $f \in L^1(R)$ şi fie $g(x) = -ixf(x)$. Dacă $g \in L^1(R)$, atunci funcţia $\widehat{f}$ este diferenţiabilă şi $\left(\widehat{f}\right)' = \widehat{g}$.
Soluţie
Pentru orice $t \in R$, avem:

$$\lim_{u\to 0} \frac{\widehat{f}(t+u) - \widehat{f}(t)}{u} = \lim_{u\to 0} \int_R e^{-ixt} f(x)\, \frac{e^{-ixu} - 1}{u} dx.$$

Propunem ca exerciţiu inegalitatea:

$$\left| e^{-ixt}\, f(x)\, \frac{e^{-ixu} - 1}{u} \right| \leq |\, xf(x)|\,, \forall u \neq 0.$$

Din ipoteză, funcţia $R \ni x \mapsto xf(x) \in R$ este integrabilă şi deci putem aplica teorema de convergenţă dominată a lui Lebesgue:

$$\lim_{u\to 0} \frac{\widehat{f}(t+u) - \widehat{f}(t)}{u} = \int_R e^{-ixt}\, f(x)\, \left(\lim_{u\to 0} \frac{e^{-ixu} - 1}{u} \right) dx =$$

$$= \int_R e^{-ixt}\, f(x)\, (-ix)\, dx = \widehat{g}(t),$$

ceea ce încheie demonstraţia.

14. Fie $f \in L^1(R)$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1(R)$ astfel încât $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Atunci $f' \in L^1(R)$ şi $\widehat{f'}(t) = it\widehat{f}(t)$, $\forall\, t \in R$.

Soluţie
Pentru orice $t \in R$, aplicând formula de integrare prin părţi, avem:

$$\widehat{f'}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f'(x)\, dx =$$

$$= e^{-ixt} f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + it \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(x)\, dx = it\widehat{f}(t).$$

6.3 Serii Fourier

15. Să se demonstreze egalităţile:

$$1 + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

$$\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

$\forall n \in N^\star$, $\forall\, x \in R, x \neq 2k\pi, k \in Z$.
Soluţie
Se înmulţeşte membrul drept cu $2 \sin \frac{x}{2}$ şi se transformă produsele în diferenţe.
Altă metodă: notăm cu S prima suma şi a doua cu T şi calculăm $S + iT$; notând $z = \cos x + i \sin x$, se obţine o progresie geometrică.

16. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia

$$f(x) = |x|,\ x \in [-\pi, \pi],$$

prelungită prin periodicitate la întregul R.
Să se deducă apoi suma seriei numerice:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ...$$

Soluţie
Funcţia este continuă; calculăm coeficienţii Fourier reali:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right),\ \forall\, n \geq 1.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin nx\,dx = 0, \forall\, n \geq 1.$$

Rezultă seria Fourier (conform teoremei lui Dirichlet):

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^2}\cos nx, \forall\, x \in [-\pi, \pi],$$

sau, echivalent:

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{m\geq 0} \frac{-4}{\pi(2m+1)^2}\cos(2m+1)x,\ \forall\, x \in [-\pi, \pi].$$

În particular, pentru $x = 0$, se obţine:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... = \frac{\pi^2}{8}.$$

17. Să se determine seria Fourier asociată funcţiei

$$f(x) = x,\ \forall x \in (-\pi, \pi],$$

prelungită prin periodicitate la R. Notând cu S suma acestei serii, să se determine $S(x)$.

Soluţie

Din periodicitate, rezultă că $f(-\pi) = f(\pi) = \pi$, deci funcţia nu este continuă în punctele $k\pi$, $k \in Z$ şi:

$$\frac{1}{2}\left(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)\right) = 0.$$

Calculăm acum coeficienţii Fourier:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0, \forall\, n \geq 0.$$

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\,dx\right) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1},\ \forall\, n \geq 1.$$

Rezultă seria Fourier:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\ \sin nx.$$

Conform teoremei lui Dirichlet rezultă :

$$S(x) = f(x),\ \forall\, x \in (-\pi, \pi),$$

iar în punctele $\pm\pi$ rezultă:

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)\right) = 0.$$

În particular, pentru $x = \frac{\pi}{2}$, se obţine seria lui Leibniz: $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

18. Să se determine seria Fourier asociată funcţiei

$$f(x) = x^2,\ x \in (-\pi, \pi],$$

prelungită prin periodicitate la R.
Să se calculeze apoi sumele seriilor de numere:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}\,,\ \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\,,\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}.$$

Soluţie
Evident, funcţia este continuă; calculăm coeficienţii Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx = \frac{2}{n\pi}x^2\sin nx\Big|_0^\pi - \frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi}x\cos nx\Big|_0^\pi - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi \sin nx\,dx = 4\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Evident, $b_n = 0, \forall\, n \geq 1$. Rezultă dezvoltarea:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} 4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\ \forall x \in [0, \pi].$$

Pentru a calcula suma primei serii, particularizăm în identitatea de mai sus $x = \pi$; rezultă:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pentru suma celei de-a doua serii, luăm $x = 0$; se obţine:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Pentru a calcula suma celei de-a treia serii, scriem mai întâi identitatea lui Parseval pentru seria trigonometrică de mai sus; rezultă:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \| f \|_2^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n^2.$$

Se obţine:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{16}\left(-\frac{2\pi^4}{9} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^4\,dx\right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

19. Fie $a \in R^\star$.

a. Să se determine seria Fourier asociată funcţiei $f(x) = e^{ax},\ x \in (-\pi, \pi]$.

b. Să se deducă sumele seriilor de numere:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 + a^2} \text{ şi } \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}$$

c. Să se deducă dezvoltările în serie Fourier ale funcţiilor $\mathrm{ch}(ax)$ şi $\mathrm{sh}(ax)$, pe intervalul $(-\pi, \pi)$.

Soluţie

a. Calculăm coeficienţii Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\,dx = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{a\pi} = 2\frac{\mathrm{sh}\,(a\pi)}{a\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos nx\,dx = \left.\frac{e^{ax}(a\cos nx + n\sin nx)}{\pi(a^2+n^2)}\right|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= (-1)^n \frac{2a\,\mathrm{sh}\,(a\pi)}{\pi(a^2+n^2)},\ \forall\, n \geq 1.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin nx\,dx = \left.\frac{e^{ax}(a\sin nx - n\cos nx)}{\pi(a^2+n^2)}\right|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{2n\,\mathrm{sh}\,(a\pi)}{\pi(a^2+n^2)},\ \forall\, n \geq 1.$$

Rezultă formula:

$$e^{ax} = \frac{2\,\mathrm{sh}\,(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx - b\sin nx)\right),\ \forall\, x \in (-\pi,\pi).$$

b. În punctele $\pm\pi$ funcţia (prelungită prin periodicitate) nu este continuă; în aceste puncte suma seriei trigonometrice este:

$$\frac{f(\pi+)+f(\pi-)}{2} = \frac{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{2} = \frac{2\,\mathrm{sh}\,(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{n\geq 1}\frac{a}{a^2+n^2}\right).$$

Din egalitatea de mai sus rezultă suma primei serii cerute:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi(e^{a\pi}+e^{-a\pi})}{2a(e^{a\pi}-e^{-a\pi})} - \frac{1}{2a^2}.$$

Pentru a calcula suma celei de-a doua serii, se ia $x = 0$ în dezvoltarea funcţiei f; se obţine:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{2a\,\mathrm{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}.$$

c. Din definiţie şi din dezvoltarea obţinută la punctul a, rezultă:

$$\mathrm{ch}(ax) = \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2} =$$

$$= \frac{\mathrm{sh}(a\pi)}{a\pi} + \sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{2a\,\mathrm{sh}(a\pi)}{a^2+n^2}\cos nx,\ \forall x\ \in (-\pi,\pi).$$

Formula de mai sus este adevărată şi în $\pm\pi$, deorece funcţia ch (prelungită prin periodicitate) este continuă.
Analog, se obţine:

$$\mathrm{sh}(ax) = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2} =$$

$$= \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{2n\,\mathrm{sh}(a\pi)}{a^2+n^2}\sin nx,\ \forall\, x \in (-\pi,\pi).$$

20. Să se demonstreze formula:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}, \, \forall x \in (0, 2\pi).$$

Soluţie
Fie $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in [0, 2\pi)$, prelungită prin periodicitate la R; calculăm coeficienţii Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \, dx = \frac{1}{2\pi} \left(\pi x - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{(\pi - x) \sin nx}{2n\pi} \Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \, dx = 0, \forall \, n \geq 1.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx \, dx =$$

$$= \frac{-(\pi - x) \cos nx}{2n\pi} \Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2n\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{n}, \forall \, n \geq 1.$$

Aplicând teorema lui Dirichlet, rezultă:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}, \, \forall x \in (0, 2\pi).$$

În punctele $x = 0$ şi $x = 2\pi$ funcţia f nu este continuă; în aceste puncte seria trigonometrică asociată ei are suma 0.

21. Să se demonstreze egalitatea:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin 2nx}{2n} = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \, \forall \, x \in (0, \pi).$$

Soluţie
Din formula:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}, \, \forall x \in (0, 2\pi),$$

demonstrată în exerciţiul precedent, înlocuind pe x cu $2x$, rezultă identitatea:

$$\frac{\pi - 2x}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin 2nx}{n}, \, \forall \, x \in (0, \pi).$$

Împărţind acum cu 2, rezultă egalitatea cerută.

22. Să se demonstreze identităţile:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\frac{\pi}{4},\ \forall x\in(0,\pi)$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=-\frac{\pi}{4},\ \forall x\in(-\pi,0).$$

Să se calculeze apoi suma seriei:

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-...$$

Soluţie
Pentru prima identitate se scad membru cu membru cele două egalităţi demonstrate în exerciţiile 20 şi 21; a doua identitate rezultă din prima şi din imparitatea funcţiei sinus. Pentru a calcula suma seriei numerice date, se ia $x=\frac{\pi}{3}$ în prima egalitate şi obţinem:

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n\geq 1}\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi}{3}}{2n-1},$$

de unde rezultă: $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-...=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

23. Fenomenul Gibbs
În jurul unui punct de discontinuitate al unei funcţii date, seria Fourier asociată ei converge doar punctual (nu neapărat uniform). Acest fapt conduce la un defect de convergenţă (aparent paradox) al şirului sumelor parţiale asociat seriei trigonometrice date, numit fenomenul Gibbs. Dăm în continuare un exemplu în acest sens.
Considerăm restricţia funcţiei signum la intervalul $(-\pi,\pi)$,

$$\operatorname{sgn}:(-\pi,\pi)\mapsto R,\ \operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & , \quad x\in(-\pi,0)\\ 0 & , \quad x=0\\ 1 & , \quad x\in(0,\pi)\end{cases}$$

În exerciţiul anterior s-a demonstrat egalitatea:

$$\operatorname{sgn}(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},\ \forall\, x\in(-\pi,\pi).$$

Notăm cu S_n şirul sumelor parţiale:

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, \, \forall \, x \in (-\pi, \pi).$$

În punctul $x = 0$ funcţia sgn nu este continuă; seria sa Fourier converge (conform teoremei lui Dirichlet) la $\frac{1}{2}(-1+1) = 0 = \text{sgn}(0)$; convergenţa $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \text{sgn}(x)$, $\forall \, x \in (-\pi, \pi)$ este punctuală, nu şi uniformă.

a. Să se demonstreze egalitatea:

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} \, dt, \, \forall \, x \in (-\pi, \pi).$$

b. Să se arate că funcţia S_n are un maxim în punctul $x = \frac{\pi}{2n}$ şi:

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt \approx 1,1789.$$

c. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \left| S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \text{sgn}(0+) \right|.$$

Soluţie

a. Calculăm mai întâi suma

$$A = \cos x + \cos 3x + ... + \cos(2n-1)x, \, \forall \, x \neq k\pi, \, k \in Z.$$

Pentru aceasta, considerăm şi suma $B = \sin x + \sin 3x + ... + \sin(2n-1)x$ şi calculăm:

$$A + iB =$$

$$= (\cos x + i \sin x) + (\cos 3x + i \sin 3x) + ... + (\cos(2n-1)x + i \sin(2n-1)x) =$$

$$= z^2 \frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1},$$

unde am notat $z = \cos x + i \sin x$. După calcule, rezultă:

$$A + iB = \frac{\sin nx}{\sin x}(\cos nx + i \sin nx),$$

şi deci:

$$\cos x + \cos 3x + ... + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}, \, \forall \, x \neq k\pi, \, k \in Z.$$

Integrând de la 0 la x, rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \int_0^x \frac{\sin 2nt}{2\sin t}\, dt,$$

sau, înmulţind cu $\frac{4}{\pi}$:

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}\, dt,\ \forall\, x \in (-\pi, \pi).$$

b. Din cele demonstrate la punctul precedent rezultă că

$$S_n'(x) = \frac{2\sin 2nx}{\pi \sin x}$$

şi deci $\frac{\pi}{2n}$ este punct critic al lui S_n; într-o vecinătate a lui $\frac{\pi}{2n}$ avem:

$$S_n'(x) = \frac{2\sin 2nx}{\pi \sin x} > 0,\ x < \frac{\pi}{2n},$$

$$S_n'(x) = \frac{2\sin 2nx}{\pi \sin x} < 0,\ x > \frac{\pi}{2n}.$$

Rezultă că $x = \frac{\pi}{2n}$ este punct de maxim al funcţiei S_n.
Calculăm acum:

$$S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t}\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin\left(\frac{u}{2n}\right)}\, \frac{du}{2n} = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin\left(\frac{u}{2n}\right)}\, du.$$

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\, du.$$

Ultima integrală se aproximează dezvoltând funcţia sinus în serie de puteri:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\, du = \int_0^{\pi} \left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}\, x^{2n-2}\right) du =$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!(2n-1)} x^{2n-1}\Big|_0^{\pi} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \pi^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}.$$

Seria fiind alternată, eroarea este mai mică decât primul termen neglijat. Cu o eroare mai mică decât 10^{-3}, se obţine

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) \approx 1,1789.$$

c. Rezultă: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|S_n\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)-\operatorname{sgn}(0+)\right|\approx 0,1789.$

24. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\in(-2,0] \\ \frac{x}{2} & , \quad x\in(0,2] \end{cases},$$

prelungită prin periodicitate (perioadă 4) la R.

Soluţie

Cu notaţiile uzuale, $\ell=2$ şi deci coeficienţii Fourier sunt:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{x}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=\begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad n \text{ par},\ n\geq 2 \\ -\frac{2}{\pi^2n^2} & \text{dacă} \quad n \text{ impar},\ n\geq 1 \end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{x}{2}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=\frac{(-1)^{n-1}}{\pi n},\ \forall\, n\geq 1.$$

Rezultă dezvoltarea:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{2}+b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\right)=f(x),\ \forall\, x\in(-2,2),$$

deci:

$$\frac{1}{4}+\sum_{n\geq 1}\left(-\frac{2}{\pi^2(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}+\frac{(-1)^{n-1}}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)=$$

$$=\begin{cases} 0 & , \quad x\in(-2,0] \\ \frac{x}{2} & , \quad x\in(0,2) \end{cases}$$

În particular, pentru $x=1$ rezultă identitatea (obţinută şi în exerciţiul 17):

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.$$

În $x=2$ funcţia nu este continuă, deci seria Fourier nu converge în acest punct la $f(2)=1$, ci, conform teoremei lui Dirichlet, la $\dfrac{f(2-)+f(2+)}{2}=\dfrac{1}{2}$; rezultă identitatea (obţinută şi în exerciţiul 16):

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

25. Fie funcţia $f : [0, \pi] \mapsto R,\ f(x) = x$.
a. Să se dezvolte f în serie de cosinusuri.
b. Să se dezvolte f în serie de sinusuri.
Soluţie
a. Calculăm coeficienţii dezvoltării în serie de cosinusuri (coeficienţii Fourier ai prelungirii pare a funcţiei f la intervalul $(-\pi, \pi)$):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac{2x\,\sin nx}{\pi n}\Big|_0^\pi - \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin nx\,dx =$$

$$= \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi},\ \forall n \geq 1.$$

Rezultă dezvoltarea în serie de cosinusuri:

$$x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n\geq 1}\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,\ \forall\, x \in [0, \pi],$$

egalitatea fiind adevărată în punctele $x = 0$ şi $x = \pi$ deoarece prelungirea pară este continuă.
b. Calculăm coeficienţii dezvoltării în serie de sinusuri (coincid cu coeficienţii Fourier ai prelungirii impare a funcţiei f):

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{2(-1)^{n-1}}{n},\ \forall\, n \geq\ 1.$$

Rezultă dezvoltarea în serie de sinusuri:

$$x = \sum_{n\geq 1}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin nx,\ \forall\, x \in [0, \pi).$$

26. Fie $a \in R^\star$; să se dezvolte funcţia $f : [0, \pi) \mapsto R,\ f(x) = e^{ax}$:
a. în serie de cosinusuri;
b. în serie de sinusuri.
Soluţie
Se calculează coeficienţii (a se vedea şi exerciţiul 19) şi rezultă dezvoltările:

$$e^{ax} = \frac{e^{a\pi} - 1}{a\pi} + \sum_{n\geq 1}\frac{2a((-1)^n e^{a\pi} - 1)}{\pi(a^2 + n^2)}\cos nx\ \forall\, x \in [0, \pi).$$

$$e^{ax} = \sum_{n\geq 1} \frac{2n(1-(-1)^n e^{a\pi})}{\pi(a^2+n^2)} \sin nx,\ \forall\, x \in (0,\pi).$$

27. Să se determine coeficienţii Fourier complecşi (spectrul în frecvenţă) ai funcţiei de perioadă 2π,

$$f(t) = e^{|t|},\ t \in [-\pi,\pi].$$

Soluţie
Pentru orice $n \in Z$, coeficienţii Fourier sunt:

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{|t|}e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-t(1+in)}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{t(1-in)}\,dt =$$

$$= \frac{-1}{2\pi(1+in)} e^{-t(1+in)}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi(1-in)} e^{t(1+in)}\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi(n^2+1)}\left(in\,\mathrm{sh}(\pi) + \mathrm{ch}(\pi) + (-1)^{n+1}\right).$$

28. Să se determine coeficienţii Fourier complecşi şi seria Fourier pentru funcţia periodică

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x \in (-\pi, 0) \\ 1 & , \quad x \in [0,\pi] \end{cases}$$

Soluţie
Calculăm coeficienţii Fourier; evident, $\widehat{f}_0 = 0$. Pentru $n \in Z^\star$, avem:

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0} e^{-int}\,dt + \int_{0}^{\pi} e^{-int}\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi in}\left(e^{-int}\Big|_{-\pi}^{0} - e^{-int}\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{i}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right).$$

Din teorema lui Dirichlet, rezultă:

$$\sum_{n\in Z} \widehat{f}_{2n+1} e^{i(2n+1)t} = \sum_{n\in Z} \frac{-2i}{(2n+1)\pi} e^{i(2n+1)\pi},\ \forall\, t \in (-\pi,0)\cup(0,\pi).$$

29. Să se determine seria Fourier complexă a funcţiei de perioadă 2π:

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi},\ x \in (0, 2\pi].$$

Să se demonstreze că seria converge uniform pe R.
Soluţie
Calculăm mai întâi coeficienţii Fourier; pentru orice $n \in Z^\star$:

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4\pi}\right)e^{-inx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi in}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2\pi}\right)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi n^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2\pi}\right)e^{-inx}\Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{2\pi n^2}.$$

Prin calcul direct, $\widehat{f}_0 = \frac{\pi}{6}$.
Funcţia f este continuă, periodică şi de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni (funcţia nu este de clasă $\mathcal{C}^1$ în punctele $2k\pi$, $\forall k \in Z$), deci seria Fourier asociată converge uniform la f pe R:

$$\frac{\pi}{6} + \sum_{n\in Z^\star}\frac{-1}{2\pi n^2}e^{inx} = \frac{x}{2}-\frac{x^2}{4\pi},\ \forall\, x \in R.$$

6.4 Operatori pe spaţii Hilbert

30. Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ cu matricea asociată (în baza canonică) $M_T = (a_{ij})_{i,j}$.
a. Să se demonstreze că matricea adjunctului $T^\star$ este $M_{T^\star} = (b_{ij})_{ij}$, unde,

$$b_{ij} = \overline{a_{ji}},\ \forall i,j \in \{1,2,...,n\}.$$

b. Să se demonstreze că operatorul T este autoadjunct dacă şi numai dacă $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $\forall i,j \in \{1,2,...,n\}$.
c. Să se demonstreze că operatorul T este unitar dacă şi numai dacă M_T este matrice ortogonală.
Soluţie
a. Fie $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ baza canonică din R^n; atunci, din definiţie,

$$a_{ij} =< Te_j, e_i >, \forall\, i,j \in \{1,2,...,n\}.$$

Pentru orice $i,j \in \{1,2,...,n\}$, avem:

$$b_{ij} =< T^\star e_j, e_i >=< e_j, (T^\star)^\star e_i >=< e_j, Te_i >= \overline{< Te_i, e_j >} = \overline{a_{ji}}.$$

Celelalte afirmaţii sunt consecinţe directe ale definiţiilor şi ale punctului a.

31. Fie $(H, <,>)$ un spaţiu Hilbert şi fie $T \in \mathcal{L}(H)$.
Notăm $\mathrm{Ker}(T)$ şi $\mathrm{Im}(T)$ nucleul şi, respectiv, imaginea operatorului T:

$$\mathrm{Ker}(T) = \{x \in H \mid Tx = 0\},\ \mathrm{Im}(T) = \{Tx \mid x \in H\}.$$

Să se demonstreze egalităţile:
a. $\mathrm{Ker}(T) = (\mathrm{Im}(T^\star))^\perp$.
b. $\mathrm{Im}(T) = (\mathrm{Ker}(T^\star))^\perp$.
Soluţie
a. Fie $x \in \mathrm{Ker}(T)$ şi fie $y \in H$; atunci:

$$< T^\star y, x >=< y, Tx >= 0$$

şi deci $x \perp \mathrm{Im}(T^\star)$. Pentru incluziunea inversă, fie $x \in (\mathrm{Im}(T^\star))^\perp$; atunci, pentru orice $y \in H$, avem:

$$< Tx, y >=< x, T^\star y >= 0$$

şi deci $Tx = 0$, adică $x \in \mathrm{Ker}(T)$.
b. Este o consecinţă a egalităţii $(T^\star)^\star = T$ şi a egalităţii de la punctul a.

32. Operatorul diagonal
a. Să se demonstreze că pentru orice $\alpha \in \ell^\infty(Z)$ şi pentru orice $x \in \ell^2(Z)$, şirul produs $\alpha x : Z \mapsto C$, $(\alpha x)(n) = \alpha(n)x(n)$ este în spaţiul $\ell^2(Z)$.
b. Fie $\alpha \in \ell^\infty(Z)$; să se demonstreze că operatorul:

$$D_\alpha : \ell^2(Z) \mapsto \ell^2(Z),\ D_\alpha x = \alpha x$$

este liniar şi continuu şi $\parallel D_\alpha \parallel = \parallel \alpha \parallel_\infty$. Operatorul D_α se numeşte operator diagonal.
c. Să se calculeze adjunctul operatorului D_α şi să se caracterizeze operatorii diagonali autoadjuncţi şi cei unitari.
d. Să se demonstreze că D_α este inversabil dacă şi numai dacă:

$$\alpha(n) \neq 0,\ \forall\, n \in Z \ \text{ şi } 0 \text{ nu este punct limită al şirului } \alpha,$$

sau, într-o formulare echivalentă, $0 \notin \overline{\{\alpha(n) \mid n \in Z\}}$, unde, bara înseamnă, în acest caz, închiderea (în C) a mulţimii respective.
e. Să se determine spectrul operatorului diagonal.
Soluţie
a. Pentru orice $\alpha \in \ell^\infty(Z)$ şi $x \in \ell^2(X)$, avem:

$$\parallel \alpha x \parallel_2 = \sqrt{\sum_{n \in Z} |\alpha(n)x(n)|^2} \leq \parallel \alpha \parallel_\infty \parallel x \parallel_2,$$

deci $\alpha x \in \ell^2(Z)$.
b. Liniaritatea este imediată. Din inegalitatea:

$$\parallel D_\alpha x \parallel_2 = \sqrt{\sum_{n \in Z} |\alpha(n)x(n)|^2} \leq \parallel \alpha \parallel_\infty \parallel x \parallel_2,$$

rezultă că D_α este continuu şi în plus $\| D_\alpha \| \leq \| \alpha \|_\infty$.
Pentru a demonstra inegalitatea inversă, fie, pentru orice $m \in Z$, şirul

$$\sigma : Z \mapsto C,\ \sigma_m(n) = \delta_m^n,$$

unde, δ_m^n este simbolul lui Kronecker.
Evident, $\| \sigma_m \|_2 = 1$ şi $D_\alpha \sigma_m = \alpha(m)\sigma_m$; rezultă:

$$|\alpha(m)| = \| \alpha(m)\sigma_m \|_2 = \| D_\alpha \sigma_m \|_2 \leq \| D_\alpha \| \, \| \sigma_m \|_2 = \| D_\alpha \| .$$

Din inegalitatea obţinută, luând supremumul (după $m \in Z$), rezultă:

$$\sup_{m \in Z} |\alpha(m)| \leq \| D_\alpha \|,$$

şi deci $\| \alpha \|_\infty \leq \| D_\alpha \|$.
c. Să notăm $\overline{\alpha}$ şirul definit prin $\overline{\alpha}(n) = \overline{\alpha(n)}$, $\forall\, n \in Z$. Pentru orice şiruri $x, y \in \ell^2(Z)$, avem:

$$< D_\alpha x, y > = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha(n) x(n) \overline{y(n)} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left(\overline{\overline{\alpha(n)} y(n)} \right) = < x, \overline{\alpha} y > = < x, D_{\overline{\alpha}} y >,$$

ceea ce arată că $D_\alpha^\star = D_{\overline{\alpha}}$. De aici rezultă următorele caracterizări:

$$D_\alpha \text{ este autoadjunct } \Leftrightarrow \alpha(n) \in R,\ \forall\, n \in Z.$$

$$D_\alpha \text{ este unitar } \Leftrightarrow |\alpha(n)| = 1,\ \forall\, n \in Z.$$

d. Să presupunem mai întâi că şirul $\alpha \in \ell^\infty(Z)$ are proprietăţile din enunţ, adică:

$$\alpha(n) \neq 0 \text{ şi } 0 \text{ nu este punct limită al lui } \alpha.$$

Rezultă că şirul definit prin:

$$\beta : Z \mapsto C,\ \beta(n) = \frac{1}{\alpha(n)}$$

este mărginit, deci putem considera operatorul $D_\beta x = \beta x$. Rezultă imediat că D_β este inversul lui D_α, deci D_α este în acest caz inversabil şi $D_\alpha^{-1} = D_\beta$.
Reciproc, să presupunem acum că operatorul D_α este inversabil şi fie D_α^{-1} inversul său; atunci:

$$\sigma_n = D_\alpha^{-1} (D_\alpha \sigma_n) = D_\alpha^{-1} (\alpha(n)\sigma_n) = \alpha(n) D_\alpha^{-1} \sigma_n,$$

deci

$$D_\alpha^{-1}\sigma_n = \frac{1}{\alpha(n)}\sigma_n,\ \forall\, n \in Z.$$

Considerând normele ambilor membri în egalitatea de mai sus, obţinem:

$$\| \frac{1}{\alpha(n)}\sigma_n \|_2 = \| D_\alpha^{-1}\sigma_n \|_2 \leq \| D_\alpha^{-1} \| \, \| \sigma_n \|_2 = \| D_\alpha^{-1} \| .$$

Rezultă deci că şirul $\frac{1}{\alpha}$ este mărginit:

$$\left| \frac{1}{\alpha(n)} \right| \leq \| D_\alpha^{-1} \|,$$

ceea ce încheie demonstraţia.
e. Fie $\lambda \in C$ şi fie $\mathbf{1}$ şirul constant 1; aplicând rezultatul de la punctul anterior operatorului $D_\alpha - \lambda I = D_{\alpha - \mathbf{1}}$, rezultă:

$$\lambda \in \sigma(D_\alpha) \ \Leftrightarrow\ \exists\, n \in Z \text{ cu } \lambda = \alpha(n) \text{ sau } \lambda \text{ este punct limită al lui } \alpha.$$

În concluzie, $\sigma(D_\alpha) = \overline{\{\alpha(n) \mid n \in Z\}}$, bara desemnând închiderea.

33. Fie H un spaţiu Hilbert şi fie $T \in \mathcal{L}(H)$. Să se demonstreze implicaţia:

$$\lambda \in \sigma_p(T^\star) \ \Rightarrow\ \overline{\lambda} \in \sigma(T).$$

Soluţie
Dacă $\lambda \in \sigma_p(T^\star)$, atunci , prin definiţie, există $x \in H$, $x \neq 0$ astfel încât $T^\star x = \lambda x$; avem deci (aplicăm exerciţiul 31):

$$\{0\} \neq \mathrm{Ker}(\lambda I - T^\star) = (\mathrm{Im}((\lambda I - T^\star)^\star))^\perp = (\mathrm{Im}(\overline{\lambda} I - T))^\perp,$$

ceea ce arată că $\mathrm{Im}(\overline{\lambda} I - T) \neq H$, deci operatorul $\overline{\lambda} I - T$ nu este surjectiv; rezultă $\overline{\lambda} \in \sigma(T)$.

34. Operatorul de translaţie unilateral
Pe spaţiul Hilbert $\ell^2(N)$ considerăm operatorul:

$$V : \ell^2(N) \longrightarrow \ell^2(N),\ (Vx)(0) = 0 \text{ şi } (Vx)(n) = x(n-1),\ \forall n \geq 1.$$

Este evident că definiţia este corectă ($Vx \in \ell^2(N)$). Operatorul V se numeşte operatorul de translaţie unilateral. Să se demonstreze următoarele proprietăţi:
a. V este liniar şi continuu.

b. V este o izometrie: $\| Vx \|_2 = \| x \|_2$, $\forall x \in \ell^2(N)$.
De aici rezultă, in particular, că $\| V \| = 1$.
c. V nu este operator inversabil (nu este surjectiv).
d. $(V^\star x)(n) = x(n+1)$, $\forall x \in \ell^2(N)$, $\forall n \in N$ şi $\| V^\star \| = 1$.
e. $V^\star V = I$ dar $VV^\star \neq I$.
f. Operatorul V nu are valori proprii: $\sigma_p(V) = \emptyset$.
g. $\sigma_p(V^\star) = \{\lambda \in C\,;\, |\lambda| < 1\}$ şi $\sigma(V) = \sigma(V^\star) = \{\lambda \in C\,;\, |\lambda| \leq 1\}$.
În legătură cu afirmaţiile de la punctele b şi c să observăm că pe spaţii finit dimensionale nu există endomorfisme injective care să nu fie surjective (de fapt operatorul V este mai mult decât injectiv, este o izometrie); dimpotrivă,în cazul finit dimensional orice operator injectiv este şi surjectiv (în plus, orice izometrie este operator unitar). Este de asemenea de reţinut faptul că V nu are valori proprii, în timp ce în cazul unui operator definit pe un spaţiu finit dimensional spectrul este format numai din valori proprii.
Soluţie
Prin definiţie, V acţionează astfel:

$$\ell^2(N) \ni x = (x(0), x(1), x(2), ..) \to (0, x(0), x(1), ..) = Vx \in \ell^2(N).$$

a,b,c. Liniaritatea o lăsăm ca exerciţiu. Este evident (din schema de mai sus) că $\| Vx \|_2 = \| x \|_2$, şi deci V este izometrie. Operatorul V nu este surjectiv deoarece $\mathrm{Im}(V) = \{x \in \ell^2(N)\,;\, x(0) = 0\} \neq \ell^2(N)$ de exemplu, nu există $x \in \ell^2(N)$ astfel încât $Vx = \sigma_o$.
d. Pentru orice $x, y \in \ell^2(N)$, avem:

$$< Vx, y > = \sum_{n=0}^{\infty} (Vx)(n)\overline{y(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x(n-1)\overline{y(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\overline{y(n+1)},$$

ceea ce arată că adjunctul lui V este:

$$\ell^2(N) \ni y = (y(0), y(1), y(2), ..) \to V^\star y = (y(1), y(2), y(3), ..) \in \ell^2(N).$$

Este evident că pentru orice $x \in \ell^2(N)$ avem $\| V^\star x \|_2 \leq \| x \|_2$,deci $\| V^\star \| \leq 1$. Dar $\| V^\star \sigma_1 \|_2 = \| \sigma_o \|_2 = 1$, deci $\| V^\star \| = 1$.
e. Este clar că $V^\star V = I$; dar, pentru orice $x \in \ell^2(N)$ cu proprietatea că $x(0) \neq 0$, avem $VV^\star x \neq x$.
f. Arătăm acum că V nu are valori proprii. Fie , prin absurd , $\lambda \in C$ astfel încât există $x \in \ell^2(N)$, $x \neq 0$, cu proprietatea $Vx = \lambda x$, adică:

$$(0, x(0), x(1), x(2), ...) = (\lambda x(0), \lambda x(1), \lambda x(2), ...).$$

De aici rezultă $x(n) = 0$, $\forall n \in N$, contradicţie cu $x \neq 0$.
Am demonstrat deci că $\sigma_p(V) = \emptyset$.

g. Deoarece $\| V \| = \| V^\star \| = 1$, rezultă că spectrele operatorilor V şi $V^\star$ sunt incluse în discul unitate închis. Vom arăta mai întâi că

$$\sigma_p(V^\star) = \{\lambda \in C\,;\, |\lambda| < 1\}.$$

Din egalitatea $V^\star x = \lambda x$, rezultă:

$$(x(1), x(2), x(3), ...) = (\lambda x(0), \lambda x(1), \lambda x(2), ...),$$

şi deci $x(n+1) = \lambda^n x(0)\,, \forall n \in N$. Dacă $x(0) = 0$, atunci $x = 0$. Rezultă deci că vectorii proprii x asociaţi valorii proprii λ sunt de forma:

$$x = (x(0), \lambda x(0), \lambda^2 x(0), \lambda^3 x(0), ...)\,, \text{ cu condiţia } x(0) \neq 0.$$

Există însă restricţia $x \in \ell^2(N)$, ceea ce este echivalent cu $|\lambda| < 1$. Am demonstrat deci că:

$$\sigma_p(V^\star) = \{\lambda \in C\,;\, |\lambda| < 1\}.$$

Din exerciţiul anterior, rezultă că $\sigma(V) \supseteq \sigma_p(V^\star)$. În concluzie, spectrele operatorilor V şi $V^\star$ conţin discul unitate deschis şi sunt conţinute în discul unitate închis. Cum spectrul este mulţime închisă, rezultă că spectrele celor doi operatori sunt egale cu discul unitate închis.

35. Fie H un spaţiu Hilbert şi fie $T \in \mathcal{L}(H)$. Mulţimea

$$\sigma_{pa}(T) = \{\lambda \in C \mid \exists\, x_n \in H \text{ cu } \| x_n \| = 1, \forall n \in N \text{ şi } \lim_{n\to\infty} (\lambda I - T)x_n = 0\}$$

se numeşte spectrul punctual aproximativ al lui T. Să se demonstreze incluziunile:

$$\sigma_p(T) \subseteq \sigma_{pa}(T) \subseteq \sigma(T).$$

Soluţie

Pentru prima incluziune, fie $\lambda \in \sigma_p(T)$ şi fie $x \in H$ un vector propriu de normă 1 asociat lui λ. Atunci şirul constant $x_n = x, \forall\, n \in N$ satisface condiţiile: $\| x_n \| = 1$ şi $(\lambda I - T)x_n = 0, \forall\, n \in N$, deci $\lambda \in \sigma_{pa}(T)$. Incluziunea $\sigma_{pa}(T) \subseteq \sigma(T)$ se demonstrează prin reducere la absurd: presupunem că $\lambda \in \sigma_{pa}(T)$ şi $\lambda \notin \sigma(T)$. Atunci există un şir x_n cu proprietăţile $\| x_n \| = 1$, $\forall\, n \in N$ şi $\lim_{n\to\infty} (\lambda I - T)x_n = 0$; de asemenea, există operatorul $(\lambda I - T)^{-1}$. Aplicând acest operator egalităţii $\lim_{n\to\infty} (\lambda I - T)x_n = 0$, rezultă $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, contradicţie cu $\| x_n \| = 1$, $\forall\, n \in N$.

36. Fie H un spaţiu Hilbert şi fie $T \in \mathcal{L}(H)$.
a. Dacă T este inversabil, atunci $\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.
b. Dacă T este unitar, atunci $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in C \mid |\lambda| = 1\}$.
Soluţie
a. Egalitatea cerută este echivalentă cu dubla implicaţie:

$$\lambda \in C \setminus \sigma(T) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in C \setminus \sigma(T^{-1}).$$

Fie $\lambda \in C \setminus \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$; atunci există $(\lambda I - T)^{-1}$ şi, în plus, el comută cu T, deci:

$$I = (\lambda I - T)(\lambda I - T)^{-1} = (T^{-1} - \lambda^{-1} I)\, \lambda T\, (\lambda I - T)^{-1} =$$

$$= (T^{-1} - \lambda^{-1} I)\, (\lambda I - T)^{-1}\, \lambda T,$$

ceea ce arată că operatorul $\lambda^{-1} I - T^{-1}$ este inversabil, deci:

$$\lambda^{-1} \in C \setminus \sigma(T^{-1}).$$

Implicaţia inversă rezultă datorită simetriei între T şi T^{-1}. Demonstraţia se încheie observând că $0 \in (C \setminus \sigma(T)) \cap (C \setminus \sigma(T^{-1}))$.
b. Presupunem că T este operator unitar, deci $T^\star = T^{-1}$. Demonstrăm mai întâi că $\| T \| = 1$:

$$\| T \|^2 = \| TT^\star \| = \| I \| = 1.$$

Evident, din egalitatea (adevărată în general, nu numai pentru operatori unitari), $(T^\star)^{-1} = (T^{-1})^\star$, rezultă că şi T^{-1} este operator unitar, deci

$$\| T \| = \| T^{-1} \| = 1.$$

Fie acum $\lambda \in \sigma(T)$; conform punctului precedent, rezultă că $\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})$. Dar $|\lambda| \leq \| T \| = 1$ şi $|\lambda^{-1}| \leq \| T^{-1} \| = 1$, deci $|\lambda| = 1$.

37. Operatorul de translaţie bilateral
Pe spaţiul Hilbert $\ell^2(Z)$ considerăm aplicaţia:

$$W : \ell^2(Z) \to \ell^2(Z)\,,\ (Wx)(n) = x(n-1)\,,\ \forall n \in Z.$$

W se numeşte operatorul de translaţie bilateral. Să se demonstreze următoarele proprietăţi:
a. W este liniar şi continuu.
b. Adjunctul lui W este $(W^\star x)(n) = x(n+1)\,,\ \forall n \in Z$.

c. W este operator unitar: $WW^\star = W^\star W = I$;
în particular, $\| W \| = \| W^\star \| = 1$.
d. Operatorii W şi $W^\star$ nu au valori proprii.
e. $\sigma(W) = \sigma_{pa}(W) = \sigma(W^\star) = \sigma_{pa}(W^\star) = \{\lambda \in C\,;\, |\lambda| = 1\}$.
Reamintim că σ_{pa} este spectrul punctual aproximativ (cf. exerciţiul 35).
Soluţie
a. Liniaritatea este imediată; continuitatea rezultă din relaţia evidentă:

$$\| Wx \|_2 = \| x \|_2 \, .$$

b. Pentru orice $x\,,\, y \in \ell^2(Z)$, avem:

$$< Wx, y > = \sum_{n \in Z} x(n-1)\overline{y(n)} = \sum_{n \in Z} x(n)\overline{y(n+1)},$$

şi deci într-adevăr $(W^\star x)(n) = x(n+1)\,,\, \forall n \in Z$.
c. Egalităţile $WW^\star = W^\star W = I$ sunt evidente.
d. Vom demonstra că W nu are valori proprii (analog se arată şi pentru $W^\star$). Presupunem prin absurd că există $\lambda \in C$ şi $x \in \ell^2(Z)\,,\, x \neq 0$ astfel încât $Wx = \lambda x$, adică

$$x(n-1) = \lambda x(n)\,,\, \forall n \in Z.$$

Rezultă deci că $x(n) = \lambda^{-n} x(0)\,,\, \forall n \in Z$. Dar $x \in \ell^2(Z)$ şi deci seriile geometrice:

$$\sum_{n=-\infty}^{0} |x(0)|^2 |\lambda|^{-2n} \text{ şi } \sum_{n=0}^{\infty} |x(0)|^2 |\lambda|^{-2n}$$

trebuie să fie simultan convergente; acest lucru este posibil numai dacă $x(0) = 0$, adică $x = 0$, contradicţie.
e. Spectrele operatorilor W şi $W^\star$ sunt incluse în cercul unitate pentru că sunt operatori unitari (exerciţiul 36).
Demonstrăm că spectrul punctual aproximativ al lui W este egal cu cercul unitate. Fie $\lambda = e^{it}$ şi fie $x_n \in \ell^2(Z)$, şirul definit prin:

$$x_n(k) = (2n+1)^{-\frac{1}{2}} e^{-ikt} \text{ pentru } |k| \leq n \text{ şi } x_n(k) = 0 \text{ în rest.}$$

Propunem cititorului să arate că $\| x_n \|_2 = 1$ şi:

$$\lim_{n \to \infty} \| (\lambda I - W) x_n \|_2 = 0.$$

Analog se calculează şi $\sigma_{pa}(W^\star)$. Cum $\sigma(W)$ şi $\sigma(W^\star)$ sunt incluse în cercul unitate, demonstraţia este încheiată.

38. Operatorul integral

Fie spaţiul Hilbert $(L^2[0,1]\,,\,\|\,\|_2)$ al funcţiilor de pătrat integrabil pe intervalul $[0,\,1]$ în raport cu măsura Lebesgue. Fie $K:[0,1]\times[0,1]\to C$ o funcţie de pătrat integrabil pe $[0,1]\times[0,1]$ şi fie:

$$\|\,K\,\|_2=\sqrt{\int_0^1\int_0^1|K(x,y)|^2dxdy}.$$

a. Să se demonstreze că pentru orice funcţie $f\in L^2[0,1]$, funcţia g definită prin egalitatea:

$$g(x)=\int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

este în $L^2[0,1]$.
Rezultă deci că putem defini aplicaţia:

$$T_K:L^2(0,1)\to L^2(0,1)\,,\,(T_Kf)(x)=\int_0^1 K(x,y)f(y)dy.$$

Operatorul T_K se numeşte operatorul integral definit de nucleul K.
b. Să se demonstreze că T_K este liniar şi continuu şi $\|\,T_K\,\|\leq\|\,K\,\|_2$.
c. Fie T_K şi T_H doi operatori integrali cu nucleele K şi respectiv H.
Să se demonstreze că operatorul T_KT_H este operator integral şi are nucleul definit prin $G(x,y)=\int_0^1 K(x,z)H(z,y)dz$, deci:

$$(T_KT_Hf)(x)=\int_0^1\left(\int_0^1 K(x,z)H(z,y)dz\right)f(y)dy.$$

În cazul particular $K=H$, obţinem:

$$(T_K^2f)(x)=\int_0^1\left(\int_0^1 K(x,z)K(z,y)dz\right)dx.$$

d. Dacă şirul de nuclee K_n converge în spaţiul Hilbert $L^2([0,1]\times[0,1])$ la funcţia K, atunci şirul de operatori integrali T_{K_n} converge în spaţiul $(\mathcal{L}\,(L^2[0,1])\,,\,\|\,\|\,)$ la operatorul integral T_K.
e. Adjunctul operatorului T_K este operatorul integral $T_{\widetilde{K}}$, cu nucleul

$$\widetilde{K}(x,y)=\overline{K(y,x)}$$

În particular, T_K este autoadjunct dacă şi numai dacă nucleul K are proprietatea $K(x,y)=\overline{K(y,x)}$ (un astfel de nucleu se numeşte simetric).

Soluţie
a. Avem (folosim inegalitatea lui Schwarz):

$$\| g \|_2^2 = \int_0^1 \left| \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy \right|^2 dx \leq$$

$$\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x,y)|^2 dy \right) \left(\int_0^1 |f(y)|^2 dy \right) dx = \| f \|_2^2 \| K \|_2^2 .$$

b. Liniaritatea este imediată; continuitatea rezultă din punctul precedent şi în plus $\| T_K \| \leq \| K \|_2$.
c. Pentru orice $f \in L^2[0,1]$, avem:

$$(T_K T_H f)(x) = \int_0^1 K(x,y) \left(T_H f\right)(y) dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 K(x,y) H(y,z) f(z) dz dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x,y) H(y,z) dy \right) f(z) dz =$$

$$= \int_0^1 G(x,z) f(z) dz = (T_G f)(x).$$

d. Demonstraţia este o consecinţă imediată a inegalităţii dintre normele operatorului integral şi a nucleului său:

$$\| T_{K_n} - T_K \| \leq \| K_n - K \|_2 \to 0.$$

e. Pentru orice $f, g \in L^2[0,1]$, avem:

$$< T_K f, g > = \int_0^1 (T_K f)(x) \overline{g(x)} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(f(y) \int_0^1 K(x,y) \overline{g(x)} dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 f(y) \overline{\left(\int_0^1 \widetilde{K}(y,x) g(x) dx \right)} dy = < f, T_{\widetilde{K}} g > .$$

39. Operatorul Volterra

Un operator integral T_K (a se vedea exerciţiul precedent) se numeşte operator de tip Volterra dacă nucleul K are proprietatea: $K(x,y) = 0$, $\forall x < y$. Rezultă că un operator Volterra este definit prin:

$$(T_K f)(x) = \int_0^x K(x,y) f(y) dy \,, \; \forall f \in L^2[0,1].$$

Analogia cu teoria matricelor este evidentă: operatorii de tip Volterra sunt analogul operatorilor asociaţi matricelor inferior triunghiulare. Se ştie că dacă o matrice A este strict inferior triunghiulară, atunci ea este nilpotentă, adică există $m \in N$ astfel încât $A^m = O$. Scopul acestui exerciţiu este de a demonstra o proprietate asemănătoare şi pentru operatorii Volterra definiţi de nuclee mărginite; o consecinţă va fi calculul spectrului unui astfel de operator.

Fie $K \in L^2([0,1] \times [0,1])$ un nucleu Volterra mărginit, deci $\| K \|_\infty < \infty$; atunci, operatorul Volterra asociat, T_K, are proprietăţile:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} (\| T_K^n \|)^{\frac{1}{n}} = 0.$

b. $\sigma(T_K) = \{0\}$; un operator cu această proprietate se numeşte cvasinilpotent.

Soluţie

a. Vom demonstra mai întâi că produsul a doi operatori de tip Volterra T_K şi T_H este un operator de acelaşi tip. Ţinând cont de cele demonstrate în exerciţiul precedent (punctul c), este suficient să arătăm implicaţia:

$$K(x,y) = H(x,y) = 0\,, \forall x < y \Rightarrow G(x,y) = 0\,,\ \forall x < y,$$

unde, conform exerciţiului precedent (punctul c):

$$G(x,y) = \int_0^1 K(x,z)H(z,y)dz.$$

Într-adevăr, dacă $x < y$, atunci orice $z \in [0,1]$ trebuie să verifice cel puţin una din inegalităţile: $x < z$ sau $z < y$; în primul caz, avem $K(x,z) = 0$, iar în al doilea $H(z,y) = 0$, deci oricum $G(x,y) = 0$. Dacă $x \geq y$, atunci:

$$G(x,y) = \int_y^x K(x,z)H(z,y).$$

Să presupunem acum că $H = K$ şi să notăm în acest caz

$$K^{[2]}(x,y) = G(x,y) = \int_0^1 K(x,z)K(z,y)dz,$$

şi în general pentru $n \in N$:

$$K^{[n]}(x,y) = \int_0^1 K(x,z)K^{[n-1]}(z,y)dz.$$

Pentru orice $0 \leq y \leq x \leq 1$, avem:

$$|K^{[2]}(x,y)| = \left| \int_y^x K(x,z)K(z,y)dz \right| \leq \| K \|_\infty^2\ (x-y).$$

Prin inducţie rezultă că pentru orice $n \in N$ şi $y \leq x$, avem:

$$|K^{[n]}(x,y)| \leq \frac{\| K \|_\infty^n}{(n-1)!}(x-y)^{n-1} \leq \frac{\| K \|_\infty^n}{(n-1)!}.$$

Rezultă deci că:

$$(\| T_K^n \|)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\| K^{[n]} \|_\infty\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\| K \|_\infty}{(n-1)!^{\frac{1}{n}}} \longrightarrow 0,$$

pentru $n \longrightarrow \infty$, ceea ce încheie demonstraţia.
b. Reamintim că raza spectrală a unui operator T este:

$$\mathrm{r}(T) = \sup\{|\lambda| \,;\, \lambda \in \sigma(T)\} = \lim_{n\to\infty} \| T^n \|^{\frac{1}{n}} .$$

Din definiţia razei spectrale rezultă în mod evident că dacă $\mathrm{r}(T) = 0$, atunci $\sigma(T) = \{0\}$. Din cele demonstrate la punctul precedent, rezultă că $\mathrm{r}(T_K) = 0$, deci $\sigma(T_K) = \{0\}$.

40. Fie $L^\infty[0,2\pi]$ spaţiul Banach al funcţiilor esenţial mărginite cu norma $\| \cdot \|_\infty$.
a. Să se arate că pentru orice $\phi \in L^\infty[0,2\pi]$ şi $f \in L^2[0,2\pi]$, funcţia produs ϕf este în $L^2[0,2\pi]$.
b. Pentru orice $\phi \in L^\infty[0,2\pi]$, fixată definim operatorul:

$$M_\phi : L^2[0,2\pi] \mapsto L^2[0,2\pi],\ M_\phi(f) = \phi f.$$

Să se demonstreze că M_ϕ este operator liniar şi continuu.
Operatorul M_ϕ se numeşte operatorul de înmulţire cu funcţia ϕ.
c. Să se demonstreze că $\| M_\phi \| = \| \phi \|_\infty$.
d. Să se demonstreze că $M_\phi^\star = M_{\overline{\phi}}$, unde, $\overline{\phi}(t) = \overline{\phi(t)}$, $\forall t \in [0,2\pi]$. Să se caracterizeze apoi operatorii de înmulţire autoadjuncţi şi cei unitari.
Soluţie
a. Pentru orice $\phi \in L^\infty[0,2\pi]$ şi $f \in L^2[0,2\pi]$, avem:

$$\| \phi f \|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |\phi(t)f(t)|^2 dt} \leq \| \phi \|_\infty \| f \|_2 < \infty.$$

b. Liniaritatea aplicaţiei M_ϕ este evidentă; continuitatea este echivalentă cu existenţa unei constante $k > 0$ cu proprietatea

$$\| M_\phi f \|_2 \leq k \ \| f \|_2,\ \forall f \in L^2[0,2\pi].$$

Din calculul făcut la punctul a, rezultă că putem lua $k = \| \phi \|_\infty$, ceea ce încheie demonstraţia.
c. Prin definiţie, norma $\| M_\phi \|$ este:

$$\| M_\phi \| = \inf\{k > 0 \, ; \, \| M_\phi f \|_2 \leq k \| f \|_2, \, \forall f \in L^2[0, 2\pi]\}.$$

Inegalitatea $\| M_\phi \| \leq \| \phi \|_\infty$ a fost demonstrată la punctul b; demonstrăm acum inegalitatea inversă. Pentru orice $n \in N$ considerăm mulţimea:

$$A_n = \{t \in [0, 2\pi] \, ; \, |\phi(t)| \geq \| \phi \|_\infty - \frac{1}{n}\}.$$

Din definiţia normei $\| \cdot \|_\infty$ rezultă că măsura Lebesgue a mulţimii A_n este nenulă (şi finită, deoarece măsură întregului cerc este finită). Fie χ_n funcţia caracteristică a mulţimii A_n; evident $\chi_n \in L^2[0, 2\pi]$ şi:

$$\| M_\phi \chi_n \|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |\phi(t)\chi(t)|^2 dt} \geq$$

$$\geq \sqrt{\int_0^{2\pi} \left(\| \phi \|_\infty - \frac{1}{n} \right)^2 |\chi_n(t)|^2 dt} \geq \left(\| \phi \|_\infty - \frac{1}{n} \right) \| \chi_n \|_2, \, \forall n \in N.$$

Rezultă inegalitatea:

$$\| M_\phi \| \geq \| \phi \|_\infty - \frac{1}{n}, \, \forall n \in N,$$

deci $\| M_\phi \| \geq \| \phi \|_\infty$.
d. Dacă $f, g \in L^2[0, 2\pi]$, atunci:

$$< M_\phi f, g > = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\phi(t) f(t)) \, \overline{g(t)} \, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \, \overline{(\overline{\phi(t)} \, g(t))} \, dt = < f, M_{\overline{\phi}} g >,$$

şi deci $(M_\phi)^\star = M_{\overline{\phi}}$. Rezultă imediat următoarele caracterizări:
M_ϕ este autoadjunct dacă şi numai dacă $\phi(t) \in R, \forall \, t \in [0, 2\pi]$.
M_ϕ este unitar dacă şi numai dacă $|\phi(t)| = 1, \, \forall \, t \in [0, 2\pi]$.

41. În spaţiul Hilbert $L^2[0, 2\pi]$ considerăm submulţimea:

$$H^2[0, 2\pi] = \{f \in L^2[0, 2\pi] \mid \widehat{f}_k = 0, \, \forall k \in Z, \, k \leq -1\}.$$

a. Să se demonstreze că $H^2[0,2\pi]$ este subspaţiu vectorial în $L^2[0,2\pi]$.
b. Să se demonstreze că $H^2[0,2\pi]$ este subspaţiu închis în $L^2[0,2\pi]$.
c. Fie funcţia $\omega_1(t) = e^{it}, \forall\, t \in [0,2\pi]$ şi fie M_{ω_1} operatorul de înmulţire cu funcţia ω_1: $M_{\omega_1} f = \omega_1 f, \forall\, f \in L^2[0,2\pi]$ (cf. exerciţiului precedent). Să se demonstreze că $H^2[0,2\pi]$ este subspaţiu invariant pentru operatorul M_ω, adică $M_{\omega_1} h \in H^2[0,2\pi]$, $\forall\, h \in H^2[0,2\pi]$.
Soluţie
În acest exerciţiu (şi în următorul) vom nota coeficienţii Fourier ai unei funcţii f cu $\widehat{f}(n)$.
a. Pentru orice $f, g \in H^2[0,2\pi]$ şi $\alpha, \beta \in C$, avem:

$$\widehat{(\alpha f + \beta g)}(k) = \alpha\widehat{f}(k) + \beta\widehat{g}(k) = 0, \forall k \in Z, k \leq -1,$$

deci $H^2[0,2\pi]$ este subspaţiu în $L^2[0.2\pi]$.
b. Fie $f_n \in H^2[0,2\pi]$ un şir de funcţii şi fie $f \in L^2[0,2\pi]$. Trebuie să demonstrăm că dacă f_n converge în norma $\|\cdot\|_2$ la f , atunci $f \in H^2[0,2\pi]$. Pentru aceasta, fie $k \in Z, k \leq -1$; calculăm:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}(f(t) - f_n(t))dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n(t)e^{-ikt}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\left(f(t) - f_n(t)\right)dt.$$

Ultima integrală tinde la 0 când $n \to \infty$:

$$\left|\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\left(f_n - f(t)\right)dt\right| \leq \int_0^{2\pi}\left|e^{ikt}(f_n(t) - f(t))\right|dt =$$

$$= 2\pi \parallel f_n - f \parallel_1 \leq 2\pi \parallel f_n - f \parallel_2 \to 0,$$

unde, ultima inegalitate a fost demonstrată în exerciţiul 11.
Rezultă $\widehat{f}(k) = 0, \forall\, k \in Z, k \leq -1$, şi deci $f \in H^2[0,2\pi]$.
c. Fie $k \in Z$, $k \leq -1$ şi $h \in H^2[0,2\pi]$; atunci:

$$\widehat{(M_{\omega_1}h)}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\, e^{it}\, e^{-ikt}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\, e^{-i(k-1)t}\, dt = \widehat{h}(k-1) = 0,$$

ceea ce încheie demonstraţia.

42. Fie $W : \ell^2(Z) \mapsto \ell^2(Z)$, $(Wx)(n) = x(n-1)$, operatorul de translaţie bilateral (a se vedea exerciţiul 37) şi fie, pentru orice $k \in Z$, operatorul:

$$(W^k x)(n) = x(n-k),\ \forall x \in \ell^2(Z).$$

Fie, pentru orice $k \in Z$ funcţia $\omega_k(t) = e^{ikt}, \forall\, t \in [0, 2\pi]$ şi fie M_{ω_k} operatorul de înmulţire asociat, adică (cf. exerciţiului 40):

$$(M_{\omega_k} f)(t) = \omega_k(t) f(t) = e^{ikt} f(t),\ \forall f \in L^2[0, 2\pi].$$

Să se demonstreze egalitatea:

$$(\widehat{M_{\omega_k} f})(n) = (W^k \widehat{f}\,)(n),\ \forall\, f \in L^2[0, 2\pi],\ \forall\, k \in Z,\ \forall n \in Z.$$

Soluţie
Cu notaţiile din enunţ, avem:

$$(\widehat{M_{\omega_k} f})(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_k(t) f(t)\, e^{-int}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-i(n-k)t}\, dt = \widehat{f}(n-k) = (W^k \widehat{f}\,)(n),$$

ceea ce încheie demonstraţia.

Capitolul 7

Integrale duble şi triple

7.1 Noţiuni teoretice

Măsura Lebesgue
Fie R^k spaţiul euclidian k-dimensional şi fie $-\infty \leq a_i \leq b_i \leq \infty$, $\forall\, i = 1, 2..., k$. Un paralelipiped în R^k este orice mulţime de forma:

$$P = \{(x_1, x_2, ..., x_k) \mid a_i \leq x_i \leq b_i,\ \forall i = 1, 2, ..., k\}.$$

Inegalităţile nestricte pot fi înlocuite şi de inegalităţi stricte. Prin definiţie, mulţimea vidă şi R^k sunt paralelipipede.

Măsura (Lebesgue) a unui paralelipiped este definită prin:

$$\mu\,(P) = \Pi_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

În cazurile particulare $k = 1, 2, 3$ se obţin noţiunile uzuale de lungime, arie, volum.

O submulţime $E \subseteq R^k$ se numeşte elementară dacă există $P_1, P_2, ..., P_n$ paralelipipede astfel încât $E = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$.
Notăm cu $\mathcal{E}$ familia mulţimilor elementare din R^k.
Orice mulţime elementară se poate scrie ca reuniune de paralelipipede disjuncte două câte două. Dacă $E = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ este o astfel de descompunere, atunci măsura Lebesgue a lui E este: $\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu(P_i)$. Se poate arăta că $\mu(E)$ nu depinde de descompunerea considerată.

Proprietăţile aplicaţiei μ pe familia mulţimilor elementare sunt:
i. dacă $A, B \in \mathcal{E}$ atunci $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ sunt mulţimi elementare.
ii. dacă $A, B \in \mathcal{E}$ astfel încât $A \cap B = \emptyset$ atunci $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
iii. pentru orice $A \in \mathcal{E}$ şi $\varepsilon > 0$ există $F, G \in \mathcal{E}$, F închisă şi G deschisă astfel încât:

$$F \subseteq A \subseteq G$$

$$\mu(G) - \varepsilon < \mu(A) < \mu(F) + \varepsilon.$$

Aplicaţia μ se prelungeşte la toate părţile lui R^k; fie $A \subseteq R^k$ şi fie

$$\mu^\star(A) = \inf\{\sum_{n\in N} \mu(A_n) \mid A \subseteq \bigcup_{n\in N} A_n,\ A_n \in \mathcal{E},\ A_n \text{ deschisă } \forall n \in N\}.$$

Aplicaţia $\mu^\star$ se numeşte măsură exterioară; principalele proprietăţi sunt:
i. $\mu^\star(A) \geq 0$, $\forall A \subseteq R^k$.
ii. dacă $A_1 \subseteq A_2$ atunci $\mu^\star(A_1) \leq \mu^\star(A_2)$.
iii. dacă $E \in \mathcal{E}$ atunci $\mu^\star(E) = \mu(E)$.
iv. $\mu^\star\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) \leq \sum_{n\in N} \mu^\star(A_n)$, $\forall A_n \subseteq R^k$.
Se demonstrează că există o σ-algebră de părţi ale lui R^k, notată $\mathcal{M}$ astfel încât restricţia $\mu^\star : \mathcal{M} \mapsto [0, \infty]$ este măsură. Măsura astfel obţinută (notată μ) se numeşte măsura Lebesgue (în R^k), iar elementele lui $\mathcal{M}$ se numesc mulţimi măsurabile Lebesgue.

Principalele proprietăţi ale spaţiului cu măsură $\left(R^k, \mathcal{M}, \mu\right)$ sunt:
i. $\mathcal{M}$ conţine mulţimile Boreliene.
ii. dacă $A \in \mathcal{M}$ atunci $\mu(A) = \inf\{\mu(D) \mid D \text{ deschisă şi } D \supseteq A\}$.
iii. dacă $A \in \mathcal{M}$ atunci $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \text{ compactă şi } K \subseteq A\}$.
iv orice mulţime compactă are măsură Lebesgue finită.
v. dacă $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$ şi $B \subseteq A$ atunci $B \in \mathcal{M}$ şi $\mu(B) = 0$.
vi. dacă $A \in \mathcal{M}$ atunci pentru orice $x \in R^k$ mulţimea (translatată) $A + x = \{a + x \mid a \in A\}$ este măsurabilă Lebesgue şi $\mu(A + x) = \mu(A)$.

Integrala Lebesgue
Dacă f este o funcţie integrabilă în raport cu măsura Lebesgue (în R^k), atunci integrala corespunzătoare (pe o mulţime A) se notează

$$\int_A f(x_1, x_2, ..., x_k) dx_1 dx_2 ... dx_k.$$

În cazurile particulare (uzuale) $k = 1, 2, 3$ se folosesc notaţiile:

$$\int_A f(x)dx,\ \int\int_A f(x,y)dxdy,\ \int\int\int_A f(x,y,z)dxdydz.$$

Legătura cu integrabilitatea în sens Riemann
i. Dacă $f : [a, b] \mapsto R$ este o funcţie integrabilă Riemann (pe intervalul compact $[a, b]$), atunci f este şi integrabilă în raport cu măsura Lebesgue şi cele două integrale sunt egale.
ii. Dacă $f : [a, b] \mapsto R$ este o funcţie mărginită atunci ea este integrabilă Riemann dacă şi numai dacă mulţimea punctelor sale de discontinuitate are măsura Lebesgue nulă (se spune că f este continuă a.p.t.).
iii. Există funcţii care sunt integrabile Lebesgue dar nu sunt integrabile Riemann; de exemplu, funcţia lui Dirichlet (pe intervalul $[0, 1]$) nu este integrabilă Riemann dar este integrabilă Lebesgue (integrala sa este 0, pentru că funcţia este nulă a.p.t.).
iv. Dacă $\int_a^b f(x)dx$ este o integrală Riemann improprie absolut convergentă atunci f este integrabilă Lebesgue şi integralele sunt egale.
Există însă integrale Riemann improprii convergente $\int_a^b f(x)dx$ (dar nu absolut convergente) pentru care funcţia f nu este integrabilă Lebesgue; de exemplu $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pe intervalul $(0, \infty)$.
Teorema lui Fubini
În continuare notăm $(x, y) \in R^{k+p}$, măsura Lebesgue în R^k cu dx, măsura Lebesgue în R^p cu dy şi măsura Lebesgue în R^{k+p} cu $dxdy$.
Fie $f : R^{k+p} \mapsto R$ o funcţie integrabilă Lebesgue; atunci:

$$\int_{R^k} \left(\int_{R^p} f(x, y)dy \right) = \int_{R^{k+p}} f(x, y)dxdy = \int_{R^p} \left(\int_{R^k} f(x, y)dx \right) dy.$$

Următoarele cazuri particulare ale rezultatului de mai sus sunt frecvent utilizate în aplicaţii.
i. Fie $\varphi, \phi : [a, b] \mapsto R$ două funcţii continue astfel încât $\varphi \leq \phi$ şi fie mulţimea

$$K = \{(x, y) \in R^2 \mid x \in [a, b],\ \varphi(x) \leq y \leq \phi(x)\}.$$

Dacă $f : K \mapsto R$ este o funcţie continuă, atunci f este integrabilă Lebesgue pe K şi:

$$\int\int_K f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

În particular, aria mulţimii K este:

$$\mu(K) = \int\int_K dxdy = \int_a^b (\phi(x) - \varphi(x))\, dx.$$

ii. Fie $D \subseteq R^2$ o mulţime compactă, fie $\varphi,\ \phi : D \mapsto R$ două funcţii continue astfel încât $\varphi \leq \phi$ şi fie

$$\Omega = \{(x,y,z) \in R^3 \mid (x,y) \in D,\ \varphi(x,y) \leq z \leq \phi(x,y)\}.$$

Dacă $f : \Omega \mapsto R$ este o funcţie continuă, atunci f este integrabilă Lebesgue pe Ω şi:

$$\int\int\int_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int\int_{D}\left(\int_{\varphi(x,y)}^{\phi(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy.$$

În particular, volumul lui Ω este:

$$\mu(\Omega) = \int\int\int_{\Omega} dxdydz = \int\int_{D}\left(\phi(x,y) - \varphi(x,y)\right)dxdy.$$

Formula schimbării de variabile
Fie $A \subseteq R^n$ o mulţime deschisă şi fie $\Lambda : A \mapsto \Lambda(A) \subseteq R^n$ un difeomorfism. Pentru orice funcţie continuă $f : \Lambda(A) \mapsto R$, avem:

$$\int_{\Lambda(A)} f(x)dx = \int_{A} (f \circ \Lambda)(y)|J_{\Lambda}(y)|dy,$$

unde J_Λ este iacobianul difeomorfismului Λ.

7.2 Integrale duble

1. Să se calculeze următoarele integrale duble:
a. $\int\int_D xy^2dxdy$, unde $D = [0,1] \times [2,3]$.
b. $\int\int_D xydxdy$, unde $D = \{(x,y) \in R^2\,;\, y \in [0,1]\,,\, y^2 \leq x \leq y\}$.
c. $\int\int_D ydxdy$, unde $D = \{(x,y) \in R^2\,;\, (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$.
Soluţie
a. $\int\int_D xy^2dxdy = \int_0^1 dx \int_2^3 xy^2dy = \int_0^1 \frac{19}{3}x\,dx = \frac{19}{6}$.
b. $\int\int_D xydxdy = \int_0^1 \int_{y^2}^{y} xydx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(y^3 - y^5\right)dy = \frac{1}{24}$.
c. $\int\int_D ydxdy = \int_1^3 dx \int_{-\sqrt{1-(x-2)^2}}^{\sqrt{1-(x-2)^2}} ydy = 0$.

2. Să se calculeze integralele duble:

a. $\int\int_D (x+3y)dxdy$, D fiind mulţimea plană mărginită de curbele de ecuaţii

$$y = x^2 + 1,\ y = -x^2,\ x = -1,\ x = 3.$$

b. $\int\int_D e^{|x+y|}dxdy$, D fiind mulţimea plană măginită de curbele de ecuaţii

$$x + y = 3,\ x + y = -3,\ y = 0,\ y = 3.$$

c. $\int\int_D xdxdy$, D fiind mulţimea plană mărginită de curba de ecuaţie

$$x^2 + y^2 = 9,\ x \geq 0.$$

Soluţii

a. $\int\int_D (x+3y)dxdy = \int_{-1}^{3} dx \int_{-x^2}^{x^2+1} (x+3y)dy.$

b. Fie $D_1 = \{(x,y) \in D\,;\, x + y \leq 0\}$ şi $D_2 = D \setminus D_1$.
Atunci $D = D_1 \cup D_2$ şi:

$$\int\int_D e^{|x+y|}dxdy = \int\int_{D_1} e^{-x-y}dxdy + \int\int_{D_2} e^{x+y}dxdy =$$

$$= \int_0^3 dy \int_{-3-y}^{-y} e^{-x-y}dx + \int_0^3 dy \int_{-y}^{3-y} e^{x+y}dx.$$

c. $\int\int_D xdxdy = \int_{-3}^{3} dy \int_0^{\sqrt{9-y^2}} xdx.$

3. Folosind coordonatele polare, să se calculeze integralele:

a. $\int\int_D e^{x^2+y^2}dxdy$, $D = \{(x,y) \in R^2\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

b. $\int\int_D \left(1 + \sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy$, $D = \{(x,y) \in R^2\,;\, x^2 + y^2 - y \leq 0,\ x \geq 0\}$.

c. $\int\int_D \ln(1 + x^2 + y^2)dxdy$, D fiind mărginit de curbele de ecuaţii

$$x^2 + y^2 = e^2,\ y = x\sqrt{3},\ x = y\sqrt{3},\ x \geq 0.$$

Soluţie

Coordonatele polare sunt $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, iacobianul este ρ, iar domeniul maxim pentru coordonatele ρ şi φ este $(\rho,\varphi) \in [0,\infty) \times [0.2\pi)$.

a. In coordonate polare domeniul de integrare este dreptunghiul $(\rho, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, 1]$, şi deci:

$$\int\int_D e^{x^2+y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho e^{\rho^2} d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{\rho^2} \Big|_0^1 d\varphi = \pi(e-1).$$

b. Înlocuind pe x şi y în condiţiile ce definesc domeniul D, obţinem

$$\rho \leq \sin\varphi, \ \cos\varphi \geq 0$$

şi deci

$$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}), \ \rho \in [0, \sin\varphi].$$

Rezultă:

$$\int\int_D \left(1 + \sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sin\varphi} \rho(1+\rho) d\rho = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{9}.$$

c. Domeniul de integrare în coordonate polare este dreptunghiul $(\rho, \varphi) \in [0, e] \times [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$, deci:

$$\int\int_D \ln(1+x^2+y^2) dxdy = \int_0^e d\rho \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \rho \ln(1+\rho^2) d\varphi =$$

$$= \frac{\pi(1+e^2)}{12} \left(\ln(1+e^2) - 1\right) + \frac{\pi}{12}.$$

4. Să se calculeze cu o eroare mai mică decât 10^{-2} integralele:

a. $\int\int_A \frac{dxdy}{1+xy}$, $A = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$.

b. $\int\int_B \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2)}}$, $dxdy$, unde:

$$B = \{(x, y) \, ; \, 1 \leq x^2 + y^2 \leq (e-1)^2\}.$$

Soluţii

a.

$$\int\int_A \frac{dxdy}{1+xy} = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^1 \frac{dy}{1+xy} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+xy)}{x} \Big|_0^1 dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}} \cong \frac{65}{144}.$$

b. Folosim coordonatele polare:

$$\int\int_B \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2)}} = 4\pi \int_1^{e-1} \frac{\ln\rho}{\rho-1} d\rho =$$

$$= 4\pi \int_0^{e-2} \frac{\ln(1+u)}{u} du = 4\pi \int_0^{e-2} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} \rho^n d\rho =$$

$$= 4\pi \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n (e-2)^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

În continuare se aproximează suma seriei alternate obţinute.

5. Fie $D \subseteq R^2$ şi fie $f : D \mapsto [0,\infty)$ o funcţie continuă.
Să se calculeze volumul mulţimii

$$\Omega = \{(x,y,z) \in R^3 \,;\, (x,y) \in D,\, 0 \leq z \leq f(x,y)\},$$

în următoarele cazuri:
a. $D = \{(x,y) \in R^2 \,;\, x^2+y^2 \leq 2y\},\ f(x,y) = x^2+y^2$.
b. $D = \{(x,y) \in R^2 \,;\, x^2+y^2 \leq x,\ y > 0\},\ f(x,y) = xy$.
c. $D = \{(x,y) \in R^2 \,;\, x^2+y^2 \leq 2x+2y-1\},\ f(x,y) = y$.
Soluţie
Volumul mulţimii Ω este dat de formula

$$\text{vol}(\Omega) = \int\int_D f(x,y)dxdy$$

a. Trecând la coordonate polare, se obţine:

$$\text{vol}(\Omega) = \int\int_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho^3 d\rho = \frac{3}{2}\pi.$$

b. Cu aceeaşi metodă, se obţine:

$$\text{vol}(\Omega) = \int\int_D xydxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi \, d\rho = \frac{1}{24}.$$

c. Cu schimbarea de variabile:

$$x = 1+\rho\cos\varphi,\ y = 1+\rho\sin\varphi,\ (\rho,\varphi) \in [0,1] \times [0.2\pi),$$

rezultă:

$$\text{vol}(\Omega) = \int\int_D ydxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho(1+\rho\sin\varphi)d\rho = \pi.$$

6. Să se calculeze ariile mulţimilor plane D mărginite de curbele de ecuaţii:

a. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, a$ şi b fiind două constante pozitive.

b. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2(x^2-y^2), x>0,\ a$ fiind o constantă pozitivă.

c. $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy,\ a$ fiind o constantă pozitivă.

Soluţii

a. Ecuaţia elipsei în coordonate polare generalizate,
$x=a\rho\cos\varphi,\ y=b\rho\sin\varphi,$ este $\rho=1$ şi deci obţinem:

$$\text{aria}(D)=\int\int_D dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 ab\rho d\rho=\pi ab.$$

b. Ecuaţia curbei în coordonate polare este $\rho^2=a^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$, sau $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$, şi deci domeniul de integrare în coordonate polare este

$$\varphi\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right),\ \rho\in(0,a\sqrt{\cos 2\varphi}).$$

Rezultă:

$$\text{aria}(D)=\int\int_D dxdy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\rho d\rho=\frac{a^2}{2}.$$

c. Ecuaţia lemniscatei în coordonate polare este $\rho^2=2a^2\cos\varphi\sin\varphi$. Domeniul de integrare este $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\pi,\frac{3\pi}{2}),\ \rho\in(0,a\sqrt{\sin 2\varphi})$; obţinem:

$$\text{aria}(D)=\int\int_D dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}\rho d\rho=a^2.$$

7. Fie $\alpha\in R$ şi fie D discul unitate închis. Să se calculeze integralele:

a. $I=\displaystyle\int\int_D\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}$

b. $J=\displaystyle\int\int_{R^2\setminus D}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}.$

Soluţie

$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}=\begin{cases}\frac{\pi}{1-\alpha} & \text{dacă}\quad \alpha<1\\ \infty & \text{dacă}\quad \alpha\geq 1\end{cases}$$

$$J=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^{\infty}\frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}=\begin{cases}\frac{\pi}{\alpha-1} & \text{dacă}\quad \alpha>1\\ \infty & \text{dacă}\quad \alpha\leq 1\end{cases}$$

7.3 Integrale triple

8. Fie mulţimea:

$$\Omega = \{(x,y,z) \in R^3 \,;\, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1,\, x^2+y^2 \geq 1,\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, 0 \leq z \leq 5\}$$

Să se calculeze integrala $\int\int\int_\Omega \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz$ prin două metode:
a. proiectând Ω pe planul xoy şi
b. folosind coordonatele cilindrice.
Soluţie
a. Proiecţia mulţimii Ω pe planul xoy este

$$D = \{(x,y) \in R^2 \,;\, x \in [0,1],\, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 2\sqrt{1-x^2}\}$$

Obţinem:

$$\int\int\int_\Omega \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz = \int\int_D dxdy \int_0^5 \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dz =$$

$$= \frac{25}{2} \int\int_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy,$$

integrală care se calculează folosind coordonate polare.
b. Coordonatele cilindrice sunt $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi, z = z$, domeniul maxim fiind $(\rho,\varphi,z) \in [0,\infty) \times [0,2\pi) \times R$, iar iacobianul $J = \rho$.
Pentru Ω, domeniul de integrare în coordonate cilindrice este
$z \in [0,5]$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\rho \in [1, \frac{2}{\sqrt{3\cos^2\varphi+1}}]$ şi deci:

$$\int\int\int_\Omega \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz = \int_0^5 dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3\cos^2\varphi+1}}} \frac{z\rho\sin\varphi}{\rho}\rho\, d\rho =$$

$$= \frac{25}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3(1-\cos^2\varphi)}{3\cos^2\varphi+1} \sin\varphi\, d\varphi = \frac{25}{18}(4\sqrt{3}\pi - 9).$$

9. Să se calculeze integralele:
a. $\int\int\int_\Delta (y-x)\, dxdydz$,
$\Delta = \{(x,y,z) \in R^3 \,;\, x^2+y^2+z^2 \leq 1,\, y > 0\}$
b. $\int\int\int_\Omega \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} dxdydz$,
$\Omega = \{(x,y,z) \in R^3 \,;\, y \geq 0,\, z \geq 0,\, x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq 1\}$.

c. $\int\int\int_{\Pi} z\,dxdydz$,
$\Pi = \{(x,y,z) \in R^3\,;\, x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1\}$.
Soluţie
Coordonatele sferice sunt

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta,$$

domeniul maxim fiind:

$$(\rho,\theta,\varphi) \in [0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi),$$

iar iacobianul $J = \rho^2\sin\theta$.
a. Pentru Δ, domeniul în coordonate sferice este

$$\rho \in [0,1],\ \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,\pi]$$

şi avem:

$$\int\int\int_{\Delta}(y-x)dxdydz =$$

$$= \int_0^1 d\rho\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{\pi}\rho^3\sin^2\theta(\sin\varphi-\cos\varphi)d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

b. Coordonatele sferice generalizate sunt:

$$x = a\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = c\rho\cos\theta,$$

având acelaşi domeniu maxim ca mai sus şi iacobianul $J = abc\rho^2\sin\theta$.
Pentru domeniul Ω vom lua $a=1$, $b=3$, $c=2$, şi onţinem:

$$\int\int\int_{\Omega}\left(1-x^2-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}dxdydz =$$

$$= \int_0^1 d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\pi} 6\rho^2\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\sin\theta d\varphi = 6\pi\int_0^1\rho^2(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\,d\rho =$$

$$= 6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\cos^4 t\,dt = 6\pi\int_0^{\infty}\frac{u^2}{(1+u^2)^4}\,du =$$

$$= 3\pi\left(-\frac{u}{3(1+u^2)^3}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{du}{3(1+u^2)^3}\right) = \pi\int_0^{\infty}\frac{du}{(1+u^2)^3} =$$

$$= \pi\left(\int_0^{\infty}\frac{du}{(1+u^2)^2} - \int_0^{\infty}\frac{u^2}{(1+u^2)^3}\,du\right) = \frac{3}{4}\pi\int_0^{\infty}\frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{3}{16}\pi.$$

c. Pentru Π, domeniul în coordonate sferice este

$$\varphi \in [0, 2\pi),\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \rho \in [0, 2\cos\theta)$$

şi deci:

$$\int\int\int_{\Pi} z dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^3 \sin\theta\cos\theta\ d\rho =$$

$$8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\ \sin\theta\ d\theta = \frac{4}{3}\pi.$$

10. Fie $0 < k < R$; să se calculeze volumul mulţimii:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ z \geq k\}.$$

Soluţie
Mulţimea Ω este interiorul calotei sferice situate "deasupra" planului $z = k$. Pentru a calcula volumul, trecem la coordonate sferice. Fie $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ astfel încât $R\cos\theta_0 = k$, deci $\cos\theta_0 = \frac{k}{R}$; rezultă domeniul (pentru coordonatele sferice):

$$\varphi \in [0, 2\pi),\ \theta \in [0, \theta_0],\ \rho \in [\frac{k}{\cos\theta}, R].$$

Se obţine:

$$\int\int\int_{\Omega} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} d\theta \int_{\frac{k}{\cos\theta}}^{R} \rho^2 \sin\theta\ d\rho =$$

$$\frac{2\pi}{3} \int_0^{\theta_0} \left(R^3 - \frac{k^3}{\cos^3\theta}\right) d\theta = \frac{2\pi}{3} \left(-R^3\cos\theta - \frac{k^3}{2\cos^2\theta}\right)\Bigg|_0^{\theta_0} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left(R^3 - \frac{3}{2}r^2 k + \frac{k^3}{2}\right).$$

11. Să se calculeze volumele mulţimilor Ω mărginite de suprafeţele de ecuaţii:
a. $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $2x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z \geq 0$.
b. $z = x^2 + y^2 - 1$, $z = 2 - x^2 - y^2$.
c. $z = 4 - x^2 - y^2$, $2z = 5 + x^2 + y^2$.
d. $x^2 + y^2 = 1$, $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.
e. $x^2 + y^2 = 4a^2$, $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, $x + y + z = 3$, $x \geq 0$, $z \geq 0$, $a \in (0, 1)$.
f. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = x^2$, $x \geq 0$.

Soluţie
a. Curba de intersecţie dintre elipsoid şi con este elipsa de ecuaţii

$$4x^2 + 2y^2 = 1,\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Proiecţia pe planul xoy a lui Ω este

$$D = \{(x, y)\,;\, 4x^2 + 2y^2 \leq 1\}.$$

Rezultă:

$$\text{vol}(\Omega) = \int\int\int_\Omega dxdydz = \int\int_D dxdy \int_{\sqrt{2x^2+y^2}}^{\sqrt{1-2x^2-y^2}} dz =$$

$$= \int\int_D \left(\sqrt{1-2x^2-y^2} - \sqrt{2x^2+y^2}\right) dxdy =$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{1-\frac{1}{2}\rho^2} - \sqrt{\frac{1}{2}\rho^2}\right) \frac{1}{2\sqrt{2}} \rho\, d\varphi = \frac{\pi}{3}(\sqrt{2}-1).$$

b. Curba de intersecţie a celor doi paraboloizi este cercul de ecuaţii

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{2},\ z = \frac{1}{2}.$$

Proiecţia pe planul xOy a lui Ω este

$$D = \{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 \leq \frac{3}{2}\},$$

şi deci obţinem:

$$\text{vol}(\Omega) = \int\int\int_\Omega dxdydz = \int\int_D dxdy \int_{x^2+y^2-1}^{2-x^2-y^2} dz =$$

$$= \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} d\rho \int_0^{2\pi} (3-\rho^2)\rho\, d\varphi.$$

c. Curba de intersecţie dintre cei doi paraboloizi este cercul $x^2 + y^2 = 1$ situat în planul $z = 3$. Notând cu $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, rezultă:

$$\text{vol}(\Omega) = \int\int\int_\Omega dxdydz = \int\int_D dxdy \int_{\frac{1}{2}(1+x^2+y^2)}^{4-x^2-y^2} dz =$$

$$= \int\int_D \frac{3}{2}(1-x^2-y^2)\,dxdy = \frac{3}{2}\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi}(1-\rho^2)\rho\,d\varphi = \frac{3}{4}\pi.$$

d. Curba de intersecţie dintre cilindru şi con este cercul $x^2+y^2=1$ situat în planul $z=1$. Notând cu $D=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$, rezultă:

$$\text{vol}(\Omega) = \int\int\int_\Omega dxdydz = \int\int_D dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz =$$

$$= \int\int_D \left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi}(1-\rho)\,\rho\,d\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

e. Proiecţia lui Ω pe planul xOy este

$$D=\{(x,y)\,;\, x^2+y^2\le 4a^2,\, x^2+(y-a)^2\ge a^2,\, x>0\},$$

şi deci obţinem:

$$\text{vol}(\Omega) = \int\int\int_\Omega dxdydz = \int\int_D dxdy \int_0^{3-x-y} dz =$$

$$= \int_0^\pi d\varphi \int_{2a\sin\varphi}^{2a} \rho(3-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi)\,d\rho.$$

f. Curba de intersecţie dintre sferă şi con este cercul $y^2+z^2=\frac{1}{2}$, situat în planul $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Proiecţia mulţimii Ω pe planul yOz este discul $D=\{(y,z)\in R^2 \mid y^2+z^2\le \frac{1}{2}\}$; rezultă:

$$\text{vol} = \int\int\int_\Omega dxdydz = \int\int_D dydz \int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx =$$

$$= \int\int_D \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{y^2+z^2}\right) dydz = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} d\rho \int_0^{2\pi}\rho^2\,d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{12}\pi.$$

12. Să se calculeze volumele mulţimilor Ω mărginite de suprafeţele de ecuaţii:

a. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3 = x$.

b. $\left(x^2+y^2\right)^3 = z^2$, $z=0$, $z=8$.

c. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$, $0\le z\le c$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Soluţie

a. Folosim coordonatele sferice. Obţinem domeniul:
$\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\rho\in[0,\sqrt[5]{\sin\theta\cos\varphi}]$ şi deci:

$$\text{vol}(\Omega) = \int\int\int_\Omega dxdydz = \int_0^\pi d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt[5]{\sin\theta\cos\varphi}} \rho^2\sin\theta\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, \sin^{\frac{3}{5}}\theta \, \cos^{\frac{3}{5}}\varphi \, d\varphi = \frac{1}{3}\left(\int_0^{\pi} \sin^{\frac{8}{5}}\theta \, d\theta\right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{5}}\varphi \, d\varphi\right).$$

Calculăm prima integrală; mai întâi, observăm că:

$$\int_0^{\pi} \sin^{\frac{8}{5}}\theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{8}{5}}\theta \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{8}{5}}\theta \, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{8}{5}}\theta \, d\theta,$$

cu schimarea de variabilă $t = \theta - \pi$ în a doua integrală. Vom calcula acum integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{8}{5}}\theta \, d\theta$ folosind funcţia B a lui Euler (a se vedea şi exerciţiul 28(a) din capitolul 5). Cu schimbarea de variabilă $\sin^2\theta = y$, rezultă:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{8}{5}}\theta \, d\theta = \int_0^1 \frac{y^{\frac{4}{5}}}{2\sqrt{y}\sqrt{1-y}} \, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{3}{10}} (1-y)^{-\frac{1}{2}} \, dy = \frac{1}{2} B\left(\frac{13}{10}, \frac{1}{2}\right).$$

Calculăm acum integrala $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{5}}\varphi \, d\varphi$ cu aceeaşi metodă: fie $\sin^2\varphi = y$; rezultă:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{5}}\varphi \, d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{5}}\varphi \, d\varphi = 2\int_0^1 \frac{(1-y)^{\frac{3}{10}}}{2\sqrt{y}\sqrt{1-y}} \, dy =$$

$$= \int_0^1 (1-y)^{-\frac{1}{5}} y^{-\frac{1}{2}} \, dy = B\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{2}\right).$$

În concluzie, volumul cerut este:

$$\text{vol}(\Omega) = B\left(\frac{13}{10}, \frac{1}{2}\right) + B\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{2}\right).$$

b. Folosim coordonatele cilindrice; obţinem:

$$\text{vol}(\Omega) = \int\int\int_{\Omega} dxdydz = \int_0^8 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{z}} \rho \, d\rho = 32\pi.$$

c. Folosim coordonate cilindrice generalizate:

$$x = a\rho\cos\varphi, \; y = b\rho\sin\varphi, \; z = z$$

şi obţinem:

$$\text{vol}(\Omega) = \int\int\int_{\Omega} dxdydz = \int_0^c dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{z}{c}} ab\rho \, d\rho = \frac{\pi}{3}abc.$$

Capitolul 8

Integrale curbilinii şi de suprafaţă

8.1 Noţiuni teoretice

Drumuri parametrizate

Fie J un interval real; se numeşte drum parametrizat pe J cu valori în R^n orice aplicaţie continuă $\gamma : J \mapsto R^n$.
Dacă notăm $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), ..., \gamma_n(t))$, atunci relaţiile

$$x_1 = \gamma_1(t),\ x_2 = \gamma_2(t), ..., x_n = \gamma_n(t)$$

se numesc ecuaţiile parametrice ale drumului γ.
Dacă $J = [a, b]$, atunci $\gamma(a)$ şi $\gamma(b)$ se numesc capetele (extremităţile) drumului. Drumul se numeşte închis dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Opusul drumului $\gamma : [a, b] \mapsto R^n$ este, prin definiţie,

$$\gamma^- : [a, b] \mapsto R^n,\ \gamma^-(t) = \gamma(a + b - t).$$

Evident, γ şi γ^- au aceeaşi imagine.
Dacă $\gamma_1 : [a, b] \mapsto R^n$ şi $\gamma_2 : [b, c] \mapsto R^n$ sunt două drumuri parametrizate, atunci drumul concatenat $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a, c] \mapsto R^n$ este definit prin

$$\gamma_1 \cup \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b, c] \end{cases}$$

Imaginea lui $\gamma_1 \cup \gamma_2$ este reuniunea imaginilor drumurilor γ_1 şi γ_2.

Un drum $\gamma : J \mapsto R^n$ se numeşte neted dacă aplicaţia γ este de clasă $\mathcal{C}^1$ şi $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall t \in J$.
Un drum se numeşte neted pe porţiuni dacă este concatenarea unui număr finit de drumuri netede.

Două drumuri $\gamma_1 : I \mapsto R^n$ şi $\gamma_2 : J \mapsto R^n$ se numesc echivalente cu aceeaşi orientare (notăm $\gamma_1 \sim \gamma_2$) dacă există un difeomorfism strict crescător $\phi : I \mapsto J$ astfel încât $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$. Dacă difeomorfismul de mai sus este strict descrescător, atunci cele două drumuri se numesc echivalente cu orientări opuse.

În cazurile particulare $n = 2$ (plan) şi $n = 3$ (spaţiu) notaţiile uzuale sunt $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ şi respectiv $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
Lungimea unui drum neted $\gamma : [a, b] \mapsto R^3$ este:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

Integrala curbilinie de prima speţă
Fie $\gamma : [a, b] \mapsto R^3$ un drum neted şi fie $f : D \mapsto R$ o funcţie continuă astfel încât $D \supseteq \gamma([a, b])$. Integrala curbilinie de prima speţă a funcţiei f pe drumul γ este, prin definiţie:

$$\int_\gamma f(x, y, z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

Dacă γ_1 şi γ_2 sunt două drumuri parametrizate echivalente (indiferent de orientare) atunci $\int_{\gamma_1} fds = \int_{\gamma_2} fds$.

Aplicaţii
i. Dacă f este funcţia constantă 1, atunci se obţine lungimea drumului γ.
ii. Dacă imaginea lui γ este un fir material având densitatea f, atunci masa M şi coordonatele centrului de greutate G sunt date de formulele:

$$\mathrm{M} = \int_\gamma fds,$$

$$x_G = \frac{1}{M}\int_\gamma xfds,\ y_G = \frac{1}{M}\int_\gamma yfds,\ z_G = \frac{1}{M}\int_\gamma zfds.$$

Integrala curbilinie de speţa a doua

Fie $\alpha = Pdx+Qdy+Rdz$ o 1-formă diferenţială cu funcţiile P, Q, R continue pe un deschis $D \subseteq R^3$ şi fie

$$\gamma : [a, b] \mapsto R^3,\ \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

un drum parametrizat neted cu imaginea inclusă în D. Integrala curbilinie a formei diferenţiale α de-a lungul drumului γ este, prin definiţie:

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \left(P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t) + R(\gamma(t))z'(t)\right) dt.$$

Definiţia se generalizează evident la n variabile. De exemplu, în două variabile:

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_a^b \left(P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t)\right) dt.$$

Dacă γ_1 şi γ_2 sunt două drumuri parametrizate echivalente cu aceeaşi orientare, atunci integralele corespunzătoare sunt egale:

$$\int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha.$$

Dacă cele două drumuri parametrizate sunt echivalente dar cu orientări opuse, atunci integralele corespunzătoare diferă prin semn.

Notaţii vectoriale

Unei 1-forme diferenţiale $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ i se asociază (în mod canonic) câmpul de vectori $\overline{V} : D \mapsto R^3$, $\overline{V} = (P, Q, R)$. Dacă γ este un drum parametrizat neted (cu imaginea inclusă în D) atunci integrala $\int_\gamma \alpha$ se mai notează şi $\int_\gamma \overline{V} d\overline{r}$, numindu-se circulaţia câmpului $\overline{V}$ de-a lungul drumului γ. În particular, dacă $\overline{V} = \overline{F}$ este un câmp de forţe, atunci circulaţia $\int_\gamma \overline{F} d\overline{r}$ este lucrul mecanic efectuat de forţa $\overline{F}$ pe drumul γ.

Forme diferenţiale exacte

O 1-formă diferenţială $\alpha = Pdx+Qdy+Rdz$ se numeşte exactă pe mulţimea D dacă există f o funcţie (numită potenţial scalar sau primitivă) de clasă $\mathcal{C}^1(D)$ astfel încât $Df = \alpha$, sau, echivalent:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P,\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q,\ \frac{\partial f}{\partial z} = R,$$

în orice punct din D. Câmpul de vectori $\overline{V} = (P, Q, R)$ asociat formei diferenţiale α se numeşte în acest caz câmp de gradienţi.

O 1-formă diferenţială $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ se numeşte închisă pe D dacă sunt verificate (în orice punct din D) egalităţile:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Definiţiile de mai sus se generalizează în mod evident la n variabile.
Importanţa formelor diferenţiale exacte este dată de următorul rezultat:
Independenţa de drum a integralei curbilinii
Fie $\alpha = Df$ o 1-formă diferenţială exactă pe D şi fie γ un drum parametrizat neted cu imaginea inclusă în D având extremităţile $p, q \in D$; atunci:
i. $\int_\gamma Df = f(q) - f(p)$.
ii. dacă în plus drumul γ este închis, atunci $\int_\gamma Df = 0$.

Din teorema de simetrie a lui Schwarz rezultă că orice formă diferenţială exactă (cu potenţialul scalar de clasă $\mathcal{C}^2$) este în mod necesar şi închisă; reciproca acestei afirmaţii este, în general, falsă. De exemplu, forma diferenţială

$$\alpha = \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

este închisă pe $R^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dar nu este exactă pe această mulţime.
Are loc totuşi următorul rezultat fundamental:
Teorema lui Poincare
Fie α o 1-formă diferenţială de clasă $\mathcal{C}^1$ inchisă pe deschisul $D \subseteq R^n$. Atunci pentru orice $x \in D$ există o vecinătate deschisă a sa $U \subseteq D$ şi o funcţie $f \in \mathcal{C}^1$ astfel încât $Df = \alpha$ pe U.
Într-o formulare succintă teorema afirmă că orice 1-formă diferenţială închisă este local exactă.

Există mulţimi pe care teorema de mai sus este adevărată global. De exemplu, dacă mulţimea D este stelată (adică există un punct $x_0 \in D$ cu proprietatea că segmentul $[x_0, x] \subseteq D, \forall x \in D$) atunci orice 1-formă diferenţială închisă pe D este exactă pe D.

Pânze parametrizate
Fie $D \subseteq R^2$ o mulţime deschisă şi conexă; o pânză parametrizată pe D este orice aplicaţie de clasă $\mathcal{C}^1$, $\Phi : D \mapsto R^3$.
Pânza parametrizată Φ se numeşte simplă dacă aplicaţia Φ este injectivă.
Două pânze parametrizate $\Phi_1 : D_1 \mapsto R^3$ şi $\Phi_2 : D_2 \mapsto R^3$ se numesc echivalente dacă există un difeomorfism $\theta : D_1 \mapsto D_2$ astfel încât $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \theta$.

Se spune că difeomorfismul θ păstrează orientarea dacă iacobianul său este pozitiv; în acest caz se spune Φ_1 şi Φ_2 au aceeaşi orientare; în caz contrar se spune că pânzele parametrizate au orientări opuse. Evident, două pânze parametrizate echivalente au aceeaşi imagine (în R^3), numită simplu pânză (sau porţiune de suprafaţă).

Fie $\Phi : D \mapsto R^3$, $\Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$ o pânză parametrizată; pânza Φ se numeşte regulată dacă vectorii $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}$ şi $\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}$ sunt liniari independenţi în orice punct din D. În acest caz planul generat de ei se numeşte planul tangent la pânză (în punctul respectiv); vectorul normal la pânză în punctul $\Phi(u,v)$ indus de parametrizarea Φ este:

$$N_\Phi(u,v) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Dacă Φ_1 şi Φ_2 sunt două pânze parametrizate simple, regulate echivalente cu aceeaşi orientare, atunci versorii normalelor induse coincid:

$$n_{\Phi_1}(u,v) = \frac{1}{\parallel N_{\Phi_1}(u,v) \parallel} \cdot N_{\Phi_1}(u,v) = \frac{1}{\parallel N_{\Phi_2}(u,v) \parallel} \cdot N_{\Phi_2}(u,v) = n_{\Phi_2}(u,v).$$

Integrala de suprafaţă de prima speţă

Fie $\Phi : D \mapsto R^3$ o pânză parametrizată, fie $\Sigma = \Phi(D)$ imaginea ei şi fie $F : U \mapsto R$ o funcţie continuă pe imaginea pânzei. Integrala de suprafaţă de prima speţă a lui F pe Σ este, prin definiţie:

$$\int_\Sigma F(x,y,z)d\sigma = \int\int_D F(\Phi(u,v)) \parallel \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \parallel dudv.$$

Dacă pânza este parametrizată cartezian, $z = f(x,y), (x,y) \in D \subseteq R^2$, atunci formula de mai sus devine:

$$\int_\Sigma F(x,y,z)d\sigma = \int\int_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

Dacă Φ_1 şi Φ_2 sunt două parametrizări echivalente (nu neapărat cu aceeaşi orientare) atunci integralele corespunzătoare sunt egale.

Aplicaţii

i. În cazul particular $F = 1$ se obţine aria suprafeţei Σ:

$$\text{aria}\,(\Sigma) = \int_\Sigma d\sigma.$$

ii. Dacă $F \geq 0$ reprezintă densitatea unei plăci Σ, atunci masa ei este:

$$M = \int_\Sigma F d\sigma,$$

iar coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_G = \frac{1}{M}\int_\Sigma xF d\sigma,\ y_G = \frac{1}{M}\int_\Sigma yF d\sigma,\ z_G = \frac{1}{M}\int_\Sigma zF d\sigma.$$

iii. Fie $\overline{V}$ un câmp vectorial şi fie $\overline{n}$ versorul normalei indus de pânza parametrizată fixată; fluxul câmpului $\overline{V}$ prin suprafaţa Σ în raport cu orientarea aleasă (dată de versorul $\overline{n}$) este, prin definiţie:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{V}) = \int_\Sigma \overline{V}\cdot\overline{n}\, d\sigma.$$

Integrala de suprafaţă de speţa a doua

Prin definiţie, dacă

$$\omega = Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$$

este o 2-formă diferenţială şi

$$\Phi : D \mapsto R^3,\ \Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$$

este o pânză parametrizată, atunci integrala pe suprafaţa (orientată) Σ a formei diferenţiale ω este:

$$\int_\Sigma \omega = \int\int_D \left((P\circ\Phi)\frac{D(Y,Z)}{D(u,v)} + (Q\circ\Phi)\frac{D(Z,X)}{D(u,v)} + (R\circ\Phi)\frac{D(X,Y)}{D(u,v)}\right)dudv,$$

unde, $\dfrac{D(Y,Z)}{D(u,v)}$, $\dfrac{D(Z,X)}{D(u,v)}$, $\dfrac{D(X,Y)}{D(u,v)}$ sunt iacobienii funcţiilor X, Y, Z în raport cu variabilele u şi v.

Dacă Φ_1 şi Φ_2 sunt două pânze parametrizate echivalente cu aceeaşi orientare, atunci integralele corespunzătoare sunt egale; dacă parametrizările au orientări opuse, atunci integralele diferă prin semn.

Notaţii vectoriale

Unei 2-forme diferenţiale $\omega = Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$ i se asociază (în mod canonic) câmpul de vectori $\overline{V} = (P, Q, R)$; dacă $\Phi : D \mapsto R^3$ este o pânză parametrizată cu imaginea Σ (orientată cu versorul normalei $\overline{n}$), atunci:

$$\int_\Sigma \omega = \int_\Sigma \overline{V}\cdot\overline{n}\, d\sigma.$$

8.2 Integrale curbilinii

1. Fie $a \in R$ şi fie $P, Q : R^2 \mapsto R$, $P(x,y) = x^2 + 6y$, $Q(x,y) = 3ax - 4y$. Să se afle a astfel încât $\omega = Pdx + Qdy$ să fie o 1-formă diferenţială exactă pe R^2 şi apoi să se determine $f \in \mathcal{C}^1(R^2)$ cu proprietatea $df = \omega$.

Soluţie

Spaţiul R^2 este mulţime stelată, deci este suficient ca ω să fie 1-formă diferenţială închisă , adică $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$; rezultă $a = 2$. O primitivă (potenţial scalar) a lui ω se calculează fie integrând sistemul $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q$, fie direct cu formula

$f(x,y) = \displaystyle\int_{x_o}^{x} P(x, y_o)dx + \int_{y_o}^{y} Q(x,y)dy$, unde x_o şi y_o sunt arbitrari fixaţi; obţinem $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + 6xy - 2y^2 + k$, $k \in R$.

2. Fie $P, Q : R^2 \mapsto R$, definite prin:

$$P(x,y) = \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - x},\ Q(x,y) = \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} + x}$$

şi fie $\omega = Pdx + Qdy$. Să se găsească un domeniu maximal pe care forma diferenţială ω să fie exactă.

Soluţie

Funcţiile P şi Q sunt de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ şi:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{|y|}\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Mulţimea $D = \{(x,y) \in R^2\,;\, y > 0\}$ este stelată şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ pe D; evident, D este maximală cu aceste proprietăţi.

3. Folosind definiţia, să se calculeze următoarele integrale curbilinii (orientarea curbei nu este precizată):

a. $\displaystyle\int_\Gamma (x+y)dx + (x-y)dy$, $\Gamma = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}$.

b. $\displaystyle\int_\Gamma \frac{y}{x+1}dx + dy$, Γ este triunghiul ABC, $A(2,0), B(0,0), C(0,2)$.

c. $\displaystyle\int_\Gamma xdy - ydx$, $\Gamma = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$.

Soluţie

a. Cu parametrizarea $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = 2\sin t$, $t \in [0, \pi]$ obţinem:

$$\int_\Gamma (x+y)dx + (x-y)dy = \int_0^\pi (4\cos 2t - 4\sin 2t) = 0.$$

b. $\Gamma = [AC] \cup [CB] \cup [BA]$; parametrizăm fiecare segment:

$$[AC] : x(t) = 2 - t,\ y(t) = t,\ t \in [0, 2]$$

$$[CB] : x(t) = 0,\ y(t) = 2 - t,\ t \in [0, 2]$$

$$[BA] : x(t) = t,\ y(t) = 0,\ t \in [0, 2];$$

obţinem:

$$\int_\Gamma \frac{y}{x+1}dx + dy = \int_0^2 \left(\frac{t}{t-3} + 1\right) dt - \int_0^2 dt = 2 - 3\ln 3.$$

c. Parametrizarea canonică a elipsei de semiaxe a şi b este

$$x(t) = a\cos t,\ y(t) = b\sin t,\ t \in [0, 2\pi);$$

obţinem:

$$\int_\Gamma xdy - ydx = \int_0^{2\pi} abdt = 2\pi ab.$$

4. Fie $P(x, y) = e^{-x^2+y^2}\cos(2xy)$, $Q(x, y) = e^{-x^2+y^2}\sin(2xy)$ şi fie

$$\omega = Pdx + Qdy.$$

a. Să se arate că $\int_\Gamma \omega = 0$ pentru orice curbă închisă Γ.
b. Fie $\alpha \in R$. Să se calculeze integrala

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\cos(2\alpha t)dt,$$

aplicând rezultatul de la punctul a dreptunghiului $\Gamma = ABCD$, unde

$$A(0, 0), B(a, 0), C(a, \alpha), D(0, \alpha).$$

Soluţie
a. Deoarece $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, rezultă că ω este 1-formă diferenţială închisă pe R^2

şi deci şi exactă; în consecinţă, $\int_\Gamma \omega = 0$, pentru orice curbă închisă Γ.
b. Parametrizând $\Gamma = [AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DA]$, obţinem:

$$0 = \int_\Gamma \omega = \int_0^a e^{-t^2} dt + \int_0^\alpha e^{-a^2+t^2} \sin(2at) dt - \int_0^a e^{-t^2+\alpha^2} \cos(2\alpha t) dt.$$

Pentru $a \to \infty$, obţinem:

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \cos(2\alpha t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2},$$

deoarece

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ şi } \lim_{a\to\infty} \int_0^\alpha e^{-a^2+t^2} \sin(2\alpha t) dt = 0.$$

5. Să se calculeze $\int_\Gamma \omega$ în următoarele cazuri:
a. $\omega = x^2yzdx + xy^2zdy + xyz^2dz$, iar Γ este intersecţia suprafeţelor

$$x = 1,\ y^2 + z^2 = 1.$$

b. $\omega = z(z-y)dx + xzdy - xydz$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, unde Γ_1, Γ_2 şi Γ_3 sunt intersecţiile conului $x^2 + y^2 = (z-1)^2$ cu planele $x = 0$, $y = 0$, şi, respectiv, $z = 0$, cu restricţiile $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
c. $\omega = (y - 2z)dx + (x - z)dy + (2x - y)dz$, Γ fiind intersecţia suprafeţelor

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ x - y + z = 0.$$

d. $\omega = ydx + (x + z)dy + x^2dz$, Γ fiind intersecţia suprafeţelor

$$x^2 + y^2 - 2x = 0,\ x + z = 4.$$

Soluţie
Integralele se calculează cu definiţia.
a. Γ este un cerc situat în planul $x = 1$; o parametrizare este:

$$x = 1,\ y = \cos t,\ z = \sin t,\ t \in [0, 2\pi).$$

Rezultă:

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^{2\pi} \left(-\cos^2 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^2 t \right) dt = 0.$$

b. În planul $x = 0$ obţinem dreapta de ecuaţie $y + z = 1$, în planul $y = 0$ obţinem dreapta $x + z = 1$, iar în planul $z = 0$ obţinem sfertul de cerc

$x^2+y^2=1, x>0, y>0$. Rezultă parametrizările:
$\Gamma_1 : x(t)=0,\ y(t)=1-t,\ z(t)=t,\ t\in[0,1]$.
$\Gamma_2 : x(t)=t,\ y(t)=0,\ z(t)=1-t,\ t\in[0,1]$.
$\Gamma_3 : x(t)=\cos t,\ y(t)=\sin t,\ z(t)=0,\ t\in[0,\frac{\pi}{2})$.
În continuare se aplică definiţia.
c. Curba este o elipsă situată în planul $x-y+z=0$; înlocuind $z=y-x$ în ecuaţia sferei obţinem: $x^2+y^2+(y-x)^2=r^2$. Pentru a aduce ecuaţia acestei conice la forma canonică, facem schimbarea de variabile: $x-y=u$, $x+y=v$; obţinem ecuaţia:

$$\frac{u^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}r\right)^2}+\frac{v^2}{\left(\sqrt{2}r\right)^2}=1.$$

Rezultă parametrizarea:

$$u(t)=x(t)-y(t)=\sqrt{\frac{2}{3}}\,r\cos t,$$

$$v(t)=x(t)+y(t)=\sqrt{2}\,r\sin t,$$

$$z(t)=y(t)-x(t)=-\sqrt{\frac{2}{3}}\,r\cos t,\ t\in[0,2\pi).$$

Se obţine:

$$x(t)=\frac{1}{2}\,r\,\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\cos t+\sqrt{2}\,\sin t\right),$$

$$y(t)=\frac{1}{2}\,r\,\left(\sqrt{2}\,\sin t-\sqrt{\frac{2}{3}}\,\cos t\right),$$

$$z(t)=-\sqrt{\frac{2}{3}}\,r\,\cos t,\ t\in[0,2\pi).$$

În continuare se aplică definiţia.
d. Ecuaţia canonică a cilindrului este $(x-1)^2+y^2=1$ şi deci

$$x(t)-1=\cos t,\ y(t)=\sin t,\ z(t)=3-\cos t,\ t\in[0,2\pi).$$

În continuare se aplică definiţia.

6. Să se calculeze $\int_\Gamma ydx+xdy$ pe un drum cu capetele $A(2,1)$ şi $B(1,3)$.

Soluţie

Forma diferenţială $\alpha=ydx+xdy$ este închisă pe R^2 şi deci este exactă. Rezultă că integrala este independentă de drumul particular care uneşte

punctele A şi B. Integrala se calculează pe un drum particular, de exemplu pe segmentul $[AB]$, a cărui parametrizare este:

$$x(t) = \frac{5-t}{2},\ y(t) = t,\ t \in [1,3].$$

O altă metodă constă în a determina un potenţial scalar f pentru 1-forma diferenţială α:

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} y_0 dx + \int_{y_0}^{y} x dy = xy + k,$$

k fiind o constantă arbitrară. Integrala cerută în enunţ este:

$$\int_{\Gamma} \alpha = f(B) - f(A) = 1,$$

Γ fiind un drum arbitrar având capetele A şi B.

7. Fie $P, Q, R : \Omega = \{(x,y,z)\,;\, y > 0, z \geq 0\} \mapsto R$,

$$P(x,y,z) = x^2 - yz + \frac{y}{x^2+y^2},$$

$$Q(x,y,z) = y^2 - zx - \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$R(x,y,z) = z^2 - xy.$$

Notând cu $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, să se calculeze $\int_{\Gamma} \omega$, unde Γ este un drum parametrizat arbitrar (inclus în Ω) ce uneşte punctele $A(1,1,0)$ şi $B(-1,1,0)$.

Soluţie

Observăm că ω este o 1-formă diferenţială închisă:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - z = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -y = \frac{\partial P}{\partial z},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -x = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Domeniul Ω este stelat, aşadar ω este exactă pe Ω. Rezultă că $\int_{\Gamma} \omega$ nu depinde de drumul parametrizat Γ, ci doar de extremităţile A şi B şi de

orientare (de la A către B).
Fie parametrizarea $x(t) = -t$, $y(t) = 1$, $z(t) = 0$, $t \in [-1, 1]$; obţinem:

$$\int_\Gamma \omega = -\int_{-1}^{1} \left(t^2 + \frac{1}{t^2+1}\right) dt = -\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}.$$

Să mai facem observaţia că raţionamentul de mai sus nu mai este corect dacă drumul nu ar fi inclus în Ω, deoarece, pe un astfel de domeniu ω nu ar mai fi exactă şi deci integrala nu ar mai fi independentă de drum.
De exemplu, să considerăm punctele $C(1, -1, 0)$, $D(-1, -1, 0)$ şi drumul Γ_1 format prin concatenarea segmentelor (orientate) $[AC] \cup [CD] \cup [DB]$. Atunci $\int_{\Gamma_1} \omega \neq \int_\Gamma \omega$. Într-adevăr, cu parametrizarea:
$[AC] : x(t) = 1$, $y(t) = -t$, $z(t) = 0$, $t \in [-1, 1]$,
$[CD] : x(t) - t$, $y(t) = -1$, $z(t) = 0$, $t \in [-1, 1]$,
$[DB] : x(t) = -1$, $y(t) = t$, $z(t) = 0$, $t \in [-1, 1]$.
se obţine:

$$\int_{\Gamma_1} \omega = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} + 3\frac{\pi}{2}.$$

8. Fie $P, Q : R^2 \setminus \{(x, y) \mid xy = -1\} \mapsto R$,

$$P(x, y) = \frac{y}{1+xy},\ Q(x, y) = \frac{x}{1+xy}$$

şi fie $\alpha = Pdx + Qdy$. Să se calculeze integrala $\int_\Gamma \alpha$, unde Γ este un drum arbitrar având capetele $A(-1, -1)$ şi $B(3, 3)$ şi nu intersectează hiperbola $xy = -1$.
Soluţie
Forma diferenţială α este închisă:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{(1+xy)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \forall\, (x, y) \in R^2,\ xy \neq -1.$$

Mulţimea $\Omega = \{(x, y) \in R^2 \mid xy > -1\}$ este stelată, deci pe Ω α este exactă. Rezultă că integrala este independentă de drumul particular (inclus în Ω) care uneşte punctele A şi B. Un potenţial scalar pentru α pe mulţimea Ω este:

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_0}{1+xy_0} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{x}{1+xy} dy = \ln(1+xy) + k, xy > -1,$$

şi deci integrala este:

$$\int_\Gamma \alpha = f(B) - f(A) = \ln 5.$$

9. Să se calculeze circulaţia câmpului de vectori $\overline{V}$ de-a lungul curbei Γ în următoarele cazuri:
a. $\overline{V} = -(x^2+y^2)\overline{i} - (x^2-y^2)\overline{j}$,
$\Gamma = \{(x,y) \in R^2\,; x^2+y^2 = 4,\ y < 0\} \cup \{(x,y) \in R^2\,; x^2+y^2-2x = 0, y \geq 0\}$.
b. $\overline{V} = x\overline{i} + xy\overline{j} + xyz\overline{k}$,
$\Gamma = \{(x,y,z) \in R^3\,;\ x^2+y^2 = 1\} \cap \{(x,y,z) \in R^3\,;\ x+z = 3\}$.
Soluţie
Câmpului de vectori $\overline{V} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ i se asociază, prin definiţie, 1-forma diferenţială $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$; circulaţia lui $\overline{V}$ de-a lungul lui Γ este, prin definiţie integrala curbilinie: $\int_\Gamma \overline{V} d\overline{r} = \int_\Gamma \omega$.
a. Notăm:

$$\Gamma_1 = \{(x,y) \in R^2\,; x^2+y^2 = 4,\ y < 0\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x,y) \in R^2\,; x^2+y^2-2x = 0,\ y \geq 0\}.$$

O parametrizare (în sens trigonometric pozitiv) pentru Γ se obţine astfel:

$$\Gamma_1 : x(t) = 2\cos t,\ y(t) = 2\sin t,\ t \in [\pi, 2\pi),$$

$$\Gamma_2 : x(t) = 1 + \cos t,\ y(t) = \sin t,\ t \in [0, \pi].$$

b. Parametrizarea este: $x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ z(t) = 3 - \cos t,\ t \in [0, 2\pi)$.

10. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de prima speţă:
a. $\int_\Gamma y ds$, $\Gamma : x(t) = \ln(\sin t) - \sin^2 t,\ y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t,\ t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$.
b. $\int_\Gamma xy ds$, $\Gamma : x(t) = |t|,\ y(t) = \sqrt{1-t^2},\ t \in [-1, 1]$.
c. $\int_\Gamma |x-y|$, $\Gamma : x(t) = |\cos t|,\ y(t) = \sin t,\ t \in [0, \pi]$.
Soluţie
a. Cu definiţia, obţinem:

$$\int_\Gamma y ds = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin 2t \sqrt{(\mathrm{ctg}t - \sin 2t)^2 + \cos^2 2t}\, dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 t - 1)\sin t dt = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{12}.$$

b. Integrala se descompune într-o sumă de două integrale:

$$\int_\Gamma xyds = \int_{-1}^{0} -tdt + \int_0^1 tdt = 1.$$

c. Aplicând definiţia, obţinem:

$$\int_\Gamma |x-y|\, ds = \int_0^\pi |\,|\cos t| - \sin t\,|\, dt = 4(\sqrt{2}-1).$$

11. Să se calculeze lungimea L a arcului de parabolă $x = \dfrac{p}{2} - \dfrac{y^2}{2p}$, $y \in [-p, p]$.

Soluţie

Cu parametrizarea

$$y(t) = t,\, x(t) = \frac{p}{2} - \frac{t^2}{2p}, t \in [-p, p\,],$$

avem:

$$L = \int_\Gamma ds = \int_{-p}^{p} \sqrt{1 + \frac{t^2}{p^2}} dt = \frac{2}{p}\int_0^p \sqrt{t^2+p^2}\, dt =$$

$$= \frac{2}{p}\int_0^p \frac{t^2+p^2}{\sqrt{t^2+p^2}}\, dt = 2p\int_0^p \frac{dt}{\sqrt{t^2+p^2}} + \frac{2}{p}\int_0^p \frac{t^2}{\sqrt{t^2+p^2}}\, dt =$$

$$= 4p\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{2}{p}\int_0^p t\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+p^2}}\, dt =$$

$$= 4p\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{2}{p}\left(t\sqrt{t^2+p^2}|_0^p - \int_0^p \sqrt{t^2+p^2}\, dt\right).$$

Rezultă:

$$L = p\left(\sqrt{2} + 2\ln(1+\sqrt{2})\right).$$

12. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unui arc de cerc de rază R şi de măsură $\alpha \in (0, \pi)$, presupus omogen.

Soluţie

Coordonatele centrului de greutate G ale unei curbe plane Γ omogene sunt:

$$x_G = \frac{1}{L}\int_\Gamma x ds,\, y_G = \frac{1}{L}\int_\Gamma ds,$$

unde L este lungimea firului. Considerăm originea axelor de coordonate în centrul cercului şi fie A şi B două puncte simetrice faţă de axa Ox cu măsura

arcului AB egală cu α.
Cu parametrizarea $x(t) = R\cos t$, $y(t) = R\sin t$, $t \in (-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})$, obţinem:

$$x_G = \frac{1}{\alpha}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} R\cos t dt = \frac{2R}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2},\ y_G = 0.$$

13. Să se calculeze masa firului material Γ de ecuaţii parametrice:

$$x(t) = t,\ y(t) = \frac{1}{2}t^2,\ z(t) = \frac{1}{3}t^3,\ t \in [0,1],$$

şi având densitatea $F(x,y,z) = \sqrt{2y}$.
Soluţie
Conform formulei masei:

$$\mathrm{M} = \int_\Gamma F(x,y,z)ds = \int_\Gamma \sqrt{2y}\, ds = \int_0^1 \sqrt{t^2\left(1+t^2+t^4\right)}\, dt =$$

$$= \int_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}\, dt = \int_0^1 t\sqrt{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{u^2+\frac{3}{4}}\, du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{u^2+\frac{3}{4}}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}}\, du = \frac{3}{8}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{du}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}} + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{u^2}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}}\, du =$$

$$= \frac{3}{8}\ln\left(u+\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\, u\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{u^2+\frac{3}{4}}\, du.$$

Ultima integrală este M, deci (după calcule) se obţine:

$$M = \frac{3}{8}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{4}\left(3\sqrt{3}-1\right).$$

14. Să se calculeze masa şi coordonatele centrului de greutate ale firului material Γ cu parametrizarea:

$$x(t) = t,\ y(t) = \mathrm{ch}t,\ t \in [0,1]$$

şi densitatea $f(x,y)=y$.
Soluţie
Masa firului este:

$$M=\int_\Gamma y ds=\int_0^1 \mathrm{ch}t\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}\,dt=\int_0^1 \mathrm{ch}^2 t dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (1+\mathrm{ch}2t)\,dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\mathrm{sh}2t\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}\left(2+\mathrm{sh}2\right).$$

Coordonatele centrului de greutate:

$$x_G=\frac{1}{M}\int_0^1 t\ \mathrm{ch}^2 t dt=\frac{1}{2M}\int_0^1 (t+t\,\mathrm{ch}2t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2M}\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^1+\frac{1}{2}t\ \mathrm{sh}2t\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{sh}2t dt\right)=\frac{1}{8M}\left(3+2\,\mathrm{sh}2-\mathrm{ch}2\right).$$

$$y_G=\frac{1}{M}\int_0^1 \mathrm{ch}^3 t dt=\frac{1}{M}\int_0^1 \left(1+\mathrm{sh}^2 t\right)\mathrm{sh}t dt=$$

$$=\frac{1}{M}\left(\mathrm{sh}t+\frac{1}{3}\mathrm{sh}^3 t\right)\Big|_0^1=\frac{1}{M}\left(\mathrm{sh}1+\frac{1}{3}\mathrm{sh}^3 1\right).$$

8.3 Integrale de suprafaţă

15. În fiecare din exemplele următoare se dă o pânză parametrizată
$D\ni(u,v)\mapsto\Phi(u,v)=(X(u,v),Y(u,v),Z(u,v))\in R^3$.
Să se calculeze vectorii tangenţi la suprafaţă şi versorul normalei la suprafaţă.
Să se găsească în fiecare caz şi ecuaţia în coordonate carteziene.
a. Sfera; fie $R>0$; $\Phi:[0,\pi]\times[0,2\pi)\mapsto R^3$,

$$\Phi(\theta,\varphi)=(R\sin\theta\cos\varphi,R\sin\theta\sin\varphi,R\cos\theta).$$

b. Paraboloidul; fie $a>0$, $h>0$; $\Phi:[0,h]\times[0,2\pi)\mapsto R^3$,

$$\Phi(u,v)=(au\cos v,au\sin v,u^2).$$

c. Elipsoidul; fie $a>0,b>0,c>0$; $\Phi:[0,\pi]\times[0,2\pi)\mapsto R^3$,

$$\Phi(\theta,\varphi)=(a\sin\theta\cos\varphi,b\sin\theta\sin\varphi,c\cos\theta).$$

d. Conul; fie $h > 0$; $\Phi : [0, 2\pi) \times [0, h] \mapsto R^3$,

$$\Phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v).$$

e. Cilindrul; fie $a > 0$, $0 \leq h_1 \leq h_2$; $\Phi : [0, 2\pi) \times [h_1, h_2] \mapsto R^3$,

$$\Phi(\varphi, z) = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, z).$$

f. Parametrizare carteziană; fie $D \subset R^2$ şi fie $f : D \mapsto R$, $f \in \mathcal{C}^1(D)$.

$$\Phi : D \mapsto R^3,\ \Phi(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

g. Suprafaţă de rotaţie în jurul axei Oz:
Fie $0 < r_1 < r_2$ şi fie $f : [r_1, r_2] \mapsto R$, $f \in \mathcal{C}^1(D)$.

$$\Phi : [r_1, r_2] \times [0, 2\pi) \mapsto R^3,\ \Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, f(r)).$$

h. Torul; fie $0 < a < b$; $\Phi : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \mapsto R^3$,

$$\Phi(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)\,.$$

Soluţie
Vectorii tangenţi la suprafaţă sunt $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}$ şi $\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}$, iar versorul normalei este

$$\frac{1}{\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \|} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

16. În continuare, $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ este o 2-formă diferenţială iar Σ este imaginea unei pânze parametrizate; să se calculeze integrala de suprafaţă $\int_\Sigma \omega$.
a. $\omega = ydy \wedge dz + zdz \wedge dx + xdx \wedge dy$,
$\Sigma :\ X(u, v) = u \cos v,\ Y(u, v) = u \sin v,\ Z(u, v) = cv$,
$(u, v) \in [a, b] \times [0, 2\pi)$.
b. $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$,
$\Sigma :\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
c. $\omega = yzdy \wedge dz + zxdz \wedge dx + xydx \wedge dy$,
$\Sigma :\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.
d. $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx$,
$\Sigma :\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \in [1, 2]$.
e. $\omega = (y + z)dy \wedge dz + (x + y)dx \wedge dy$,
$\Sigma :\ x^2 + y^2 = a^2,\ z \in [0, 1]$.

Soluţie
Aplicăm definiţia integralei de suprafaţă de speţa a doua.
a. Iacobienii:

$$\frac{D(Y,Z)}{D(u,v)} = c\sin v,\ \frac{D(Z,X)}{D(u,v)} = -c\cos v,\ \frac{D(X,Y)}{D(u,v)} = u,$$

şi deci:

$$\int_\Sigma \omega = \int_a^b du \int_0^{2\pi} \left(cu\sin^2 v - c^2 v\cos v + u^2\cos v\right) dv = \frac{1}{2}\pi c\left(b^2 - a^2\right)$$

b. Parametrizăm sfera de centru O şi rază R:

$$X(\theta,\varphi) = R\sin\theta\cos\varphi,\ Y(\theta,\varphi) = R\sin\theta\sin\varphi,\ Z(\theta,\varphi) = R\cos\theta,$$

domeniul parametrizării $(\theta,\varphi) \in D = [0,\pi]\times[0,2\pi)$.

$$\frac{D(Y,Z)}{D(\theta,\varphi)} = R^2\sin^2\theta\cos\varphi,$$
$$\frac{D(Z,X)}{D(\theta,\varphi)} = R^2\sin^2\theta\sin\varphi,$$
$$\frac{D(X,Y)}{D(\theta,\varphi)} = R^2\sin\theta\cos\theta$$

Rezultă $\int_\Sigma \omega = 4\pi R^3$.
c. Parametrizarea canonică a elipsoidului este:

$$X(\theta,\varphi) = aR\sin\theta\cos\varphi,\ Y(\theta,\varphi) = bR\sin\theta\sin\varphi,\ Z(\theta,\varphi) = cR\cos\theta,$$
$$\theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi).$$

În continuare calculul este asemănător cu cel de la punctul anterior.
d. Parametrizarea canonică a conului este:

$$X(u,v) = v\cos u,\ Y(u,v) = v\sin u,\ Z(u,v) = v,$$
$$(u,v)\in D = [0,2\pi)\times[1,2].$$

Iacobienii:

$$\frac{D(Y,Z)}{D(u,v)} = v\cos u,\ \frac{D(Z,X)}{D(u,v)} = v\sin u,\ \frac{D(X,Y)}{D(u,v)} = -v.$$

Rezultă integrala:

$$\int_\Sigma \omega = \int\int_D \left(v^2\cos^2 u + v^2\sin^2 u\right) dudv = \frac{14}{3}\pi.$$

e. Parametrizarea canonică a cilindrului este: $(\varphi, z) \in D = [0, 2\pi) \times [0, 1]$,

$$X(\varphi, z) = a\cos\varphi,\ Y(\varphi, z) = a\sin\varphi,\ Z(\varphi, z) = z, .$$

Iacobienii:

$$\frac{D(Y,Z)}{D(\varphi,z)} = a\cos\varphi,\ \frac{D(Z,X)}{D(\varphi,z)} = a\sin\varphi,\ \frac{D(X,Y)}{D(\varphi,z)} = 0.$$

Rezultă integrala:

$$\int_\Sigma \omega = \int\int_D (a\sin\varphi + z)\ a\cos\varphi\ d\varphi dz = 0.$$

17. Să se calculeze integralele de suprafaţă:

a. $\int_\Sigma xzdy \wedge dz + yzdz \wedge dx + (x+y)dx \wedge dy,$

$\Sigma = \{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 = a^2, x > 0, y > 0, 0 < z < h\}.$

b. $\int_\Sigma xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy,$

$\Sigma = \{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x > 0, y > 0, z > 0\}.$

Soluţie

a. Parametrizarea lui Σ (o submulţime a unui cilindru) este:

$$X(\varphi, z) = a\cos\varphi,\ Y(\varphi, z) = a\sin\varphi,\ Z(\varphi, z) = z,$$

domeniul parametrizării fiind $(\varphi, z) \in D = (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, h)$. Rezultă:

$$\int_\Sigma xzdy \wedge dz + yzdz \wedge dx + (x+y)dx \wedge dy = \int\int_D a^2 z d\varphi dz = \frac{a^2h^2}{4}\pi.$$

b. Porţiunea de sferă Σ are parametrizarea:

$$X(\theta, \varphi) = R\sin\theta\cos\varphi,\ Y(\theta, \varphi) = R\sin\theta\sin\varphi,\ Z(\theta, \varphi) = R\cos\theta,$$

domeniul parametrizării $(\theta, \varphi) \in D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2})$.

În continuare calculul este similar cu cel din exerciţiul anterior (punctul b).

18. Să se calculeze integrala de suprafaţă de prima speţă

$$\int_\Sigma F(x,y,z)d\sigma$$

în următoarele cazuri:
a. $F(x,y,z)=|xyz|$, $\Sigma:\ z^2=x^2+y^2$, $z\in[0,1]$.
b. $F(x,y,z)=y\sqrt{z}$, $\Sigma:\ x^2+y^2=6z$, $z\in[0,2]$.
c. $F(x,y,z)=z^2$, $\Sigma=\{(x,y,z)\,;\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2-6y\leq 0.\}$.
Soluţie
Se aplică definiţia integralei de suprafaţă de prima speţă.
a. Parametrizarea cartezianã a conului este:

$$z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\ D=\{(x,y)\,;\ x^2+y^2\leq 1\}.$$

Rezultă:

$$\int_\Sigma |xyz|d\sigma=\int\int_D |xy|\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=$$

$$=\sqrt{2}\int\int_D |xy|\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\frac{4\sqrt{2}}{5}.$$

b. Parametrizarea cartezianã a paraboloidului este:

$$z=f(x,y)=\frac{1}{6}(x^2+y^2),\ D=\{(x,y)\in R^2\mid x^2+y^2\leq\ 12\}.$$

Rezultă:

$$\int_\Sigma y\sqrt{z}d\sigma=\int\int_D y\sqrt{\frac{1}{6}(x^2+y^2)}\sqrt{1+\frac{1}{9}(x^2+y^2)}\,dxdy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{12}}\rho^3\sqrt{1+\frac{\rho^2}{9}}\sin\varphi=0.$$

c. Cu parametrizarea cartezianã

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\ (x,y)\in D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 6y\}.$$

rezultă:

$$\int_\Sigma z^2d\sigma=\int\int_D(x^2+y^2)dxdy=$$

$$=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{6\sin\varphi}\rho^3d\rho=\frac{243}{2}\pi.$$

19. Să se calculeze ariile suprafeţelor:
a. sfera de rază R.
b. conul $z^2 = x^2 + y^2,\ z \in [0, h]$.
c. paraboloidul $z = x^2 + y^2,\ z \in [0, h]$.
Soluţii
a. Parametrizarea canonică a sferei este:

$$X(\theta, \varphi) = R\sin\theta\cos\varphi,\ Y(\theta, \varphi) = R\sin\theta\sin\varphi,\ Z(\theta, \varphi) = R\cos\theta,$$

domeniul parametrizării $(\theta, \varphi) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi)$.
Notând $\Phi(\theta, \varphi) = (X(\theta, \varphi), Y(\theta, \varphi), Z(\theta, \varphi))$, rezultă:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} =$$

$$= (R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, -R\sin\theta) \times (-R\sin\theta\sin\varphi, R\sin\theta\cos\varphi, 0) =$$

$$= \left(R^2\sin^2\theta\cos\varphi, R^2\sin^2\theta\sin\varphi, R^2\sin\theta\cos\theta\right).$$

Elementul de suprafaţă este:

$$\| \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \| = R^2\sin\theta.$$

Rezultă aria sferei S_R

$$\int_{S_R} d\sigma = \int\int_D r^2\sin\theta\, d\theta d\varphi = 4\pi R^2.$$

b. Parametrizarea cartezianã a conului este:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},\ (x, y) \in D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq h^2\}.$$

Rezultă aria conului C_h:

$$\int_{C_h} d\sigma = \int\int_D \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2}\pi h^2.$$

c. Parametrizarea cartezianã a paraboloidului este:

$$z = x^2 + y^2,\ (x, y) \in D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq h\}.$$

Rezultă aria paraboloidului P_h:

$$\int_{P_h} d\sigma = \int\int_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{h}} \rho\sqrt{1+4\rho^2}d\rho = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{(1+4h)^3}-1\right).$$

20. Să se calculeze aria $\mathcal{A}$ a suprafeţei Σ în următoarele cazuri:
a. $\Sigma:\ 2z = 4 - x^2 - y^2,\ z \in [0,1]$.
b. Σ este submulţimea de pe sfera $x^2+y^2+z^2 = 1$, situată în interiorul conului $x^2+y^2 = z^2$.
c. Σ este submulţimea de pe sfera $x^2+y^2+z^2 = R^2$, situată în interiorul cilindrului $x^2+y^2-Ry = 0$.
d. Σ este submulţimea de pe paraboloidul $z = x^2+y^2$ situată în interiorul cilindrului $x^2+y^2 = 2y$.
e. Σ este torul.
Soluţie
Aria suprafeţei Σ este $\mathcal{A} = \int_\Sigma d\sigma$.
a. $\mathcal{A} = \int\int_D \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy,\ D = \{(x,y)\,;\, 2 \le x^2+y^2 \le 4\}$.
b. $\mathcal{A} = 2\int\int_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy,\ D = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2+y^2 \le \frac{1}{2}\}$.
c. $\mathcal{A} = 2\int\int_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy,\ D = \{(x,y)\,;\, x^2+y^2 \le Ry\}$.
d. $\mathcal{A} = \int\int_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy,\ D = \{(x,y)\,;\, x^2+y^2 \le 2y\}$.
e. $\mathcal{A} = \int\int_D (a+b\cos u)dudv,\ D = [0,2\pi]\times[0,2\pi]$.

21. Să se calculeze fluxul câmpului de vectori $\overline{V}$ prin suprafaţa Σ în următoarele cazuri:
a. $\overline{V} = x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k},\ \Sigma:\ z^2 = x^2+y^2, z \in [0,1]$.
b. $\overline{V} = y\overline{i}-x\overline{j}+z^2\overline{k},\ \Sigma:\ z = x^2+y^2,\ z \in [0,1]$.
c. $\overline{V} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(y\overline{i}-x\overline{j}+\overline{k}\right),\ \Sigma:\ z = 4-x^2-y^2,\ z \in [0,1]$.
Soluţie
Fluxul câmpului de vectori $\overline{V}$ prin suprafaţa Σ în raport cu normala $\overline{n}$ este, prin definiţie, $\mathcal{F}_\Sigma(\overline{V}) = \int_\Sigma \overline{V}\overline{n}d\sigma$, $\overline{n}$ fiind versorul normalei la suprafaţa Σ.
Dacă $\Phi : D \mapsto R^3$ este o parametrizare a lui Σ, atunci fluxul este:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{V}) = \int_\Sigma \overline{V}\overline{n}d\sigma = \int\int_D (\overline{V}\circ\Phi)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)dudv =$$

$$= \int\int_D \left(\overline{V}\circ\Phi,\ \frac{\partial\Phi}{\partial u},\ \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)dudv,$$

ultima paranteză fiind produsul mixt al vectorilor $\overline{V} \circ \Phi$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}$ şi $\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}$.

a. Considerând parametrizarea cartezianǎ $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, obţinem

$$\overline{n} = \frac{1}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} \left(-x\overline{i} - y\overline{j} + \sqrt{x^2+y^2}\overline{k} \right)$$

şi deci fluxul este 0 deoarece vectorii $\overline{V}$ şi $\overline{n}$ sunt ortogonali.

b. Considerând parametrizarea cartezianǎ

$$z = x^2 + y^2,\ D = \{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

obţinem:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{V}) = \int\int_D (x^2+y^2)^2 dxdy = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^5 d\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

c. Cu parametrizarea cartezianǎ

$$z = 4 - x^2 - y^2,\ D = \{(x, y)\,;\, 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$$

obţinem:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{V}) = \int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \int_{\sqrt{3}}^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi(2 - \sqrt{3}).$$

22. Fie $a < b$ două numere reale şi $f, g : [a, b] \mapsto R$ două funcţii continue astfel încât $f(t) \geq 0$, $\forall\, t \in [a, b]$. Fie Γ o curbă (situată in planul $y = 0$) de parametrizare

$$x(t) = f(t),\ y(t) = 0,\ z(t) = g(t)$$

şi fie Σ suprafaţa de rotaţie obţinută prin rotirea curbei Γ în jurul axei Oz. Să se calculeze aria suprafeţei Σ.

Soluţie

Parametrizarea suprafeţei Σ este

$$\Phi(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)),\ (u, v) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$$

şi deci aria este:

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_\Sigma d\sigma = \int_0^{2\pi} dv \int_a^b |f(u)| \sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}\, du =$$

$$= 2\pi \int_a^b f(u) \sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}\, du.$$

Abscisa centrului de greutate al curbei (omogene) Γ este

$$x_G = \frac{\int_\Gamma x ds}{\int_\Gamma ds} = \frac{1}{L}\int_a^b f(u)\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}\, du,$$

unde, L este lungimea lui Γ. Rezultă deci $\mathcal{A}(\Sigma) = 2\pi L x_G$.

23. Să se calculeze masa şi coordonatele centrului de greutate ale unei semisfere $\mathcal{S}$ de rază R şi având densitatea constantă c.

Soluţie

Masa este dată de formula $M = \int_{\mathcal{S}} cd\sigma$, iar coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_G = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{S}} cx\, d\sigma,\ y_G = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{S}} cyd\sigma,\ z_G = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{S}} czd\sigma.$$

Considerând semisfera cu centrul în origine şi situată în semiplanul $z > 0$, parametrizarea este:

$$X(\theta,\varphi) = R\sin\theta\,\cos\varphi,$$

$$Y(\theta,\varphi) = R\sin\theta\,\cos\varphi,$$

$$Z(\theta,\varphi) = R\cos\theta,\ (\theta,\varphi) \in [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,2\pi].$$

Rezultă:

$$M = \int_{\mathcal{S}} c\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} cR^2\,\sin\theta\, d\theta = 2\pi R^2 c.$$

Din motive de simetrie (sau calcul direct) rezultă $x_G = y_G = 0$.

$$z_G = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{S}} cz\, d\sigma = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} cR^3 \sin\theta\,\cos\theta\, d\theta = \frac{R}{2}.$$

Capitolul 9

Formule integrale

9.1 Noţiuni teoretice

Formula Green-Riemann
Fie $(K, \partial K)$ un compact cu bord orientat inclus în R^2 (orientarea pe ∂K este sensul trigonometric pozitiv) şi fie

$$\alpha = Pdx + Qdy$$

o 1-formă diferenţială de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui K; atunci:

$$\int_{\partial K} Pdx + Qdy = \int\int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Dacă $\overline{V} = P\overline{i} + Q\overline{j}$ este câmpul vectorial asociat (în mod canonic) formei diferenţiale α, atunci formula se scrie sub forma:

$$\int_{\partial K} \overline{V} d\overline{r} = \int\int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

O consecinţă este următoarea formulă pentru arie (notaţiile şi orientarea pe bordul ∂K sunt cele de mai sus):

$$\text{aria}(K) = \frac{1}{2}\int_{\partial K} xdy - ydx.$$

Formula Gauss-Ostrogradski
Fie $K \subset R^3$ un compact cu bord orientat (bordul ∂K orientat după normala exterioară). Atunci, pentru orice 2-formă diferenţială

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui K, are loc egalitatea:

$$\int_{\partial K} Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy = \int\int\int_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Dacă notăm cu $\overline{V} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ câmpul vectorial asociat (în mod canonic) 2-formei diferenţiale ω, atunci formula de mai sus se scrie:

$$\int_{\partial K} \overline{V}\overline{n}d\sigma = \int\int\int_K \mathrm{div}(\overline{V})dxdydz,$$

unde, $\overline{n}$ este normala exterioară la ∂K, iar $\mathrm{div}(\overline{V}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ este divergenţa lui $\overline{V}$. Observăm că membrul stâng este fluxul câmpului $\overline{V}$ prin suprafaţa ∂K, de aceea formula Gauss-Ostrogradski se mai numeşte şi formula flux-divergenţă.

Formula lui Stokes
Fie $(\Sigma, \partial\Sigma)$ o suprafaţă bordată orientată (orientarea pe Σ este compatibilă cu orientarea pe bordul $\partial\Sigma$) şi fie $\alpha = Pdx+Qdy+Rdz$ o 1-formă diferenţială de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui Σ; atunci:

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy.$$

Dacă $\overline{V} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ este câmpul vectorial asociat (în mod canonic) formei diferenţiale α, atunci formula lui Stokes se scrie:

$$\int_{\partial\Sigma} \overline{V}d\overline{r} = \int_\Sigma (\mathrm{rot}\overline{V})\,\overline{n}\,d\sigma,$$

orientările pe curba (închisă) $\partial\Sigma$ şi pe suprafaţa Σ fiind compatibile.

În exerciţiile care urmează, se subînţelege, atunci când este cazul, că orientările pe curbe şi suprafeţe sunt compatibile, adică sunt îndeplinite ipotezele formulelor de mai sus.

9.2 Formula Green-Riemann

1. Să se calculeze direct şi aplicând formula Green-Riemann integrala curbilinie $\int_\Gamma \alpha$ în următoarele cazuri:
a. $\alpha = y^2dx + xdy$,
Γ este pătratul cu vârfurile $A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2)$.
b. $\alpha = ydx + x^2dy$, Γ este cercul cu centrul în origine şi de rază 2.
c. $\alpha = ydx - xdy$, Γ este elipsa de semiaxe a şi b şi de centru O.
Soluţie
Calculul direct al integralelor îl lăsăm ca exerciţiu. Calculăm integralele aplicând formula Green-Riemann; notăm cu K compactul mărginit de Γ.
a. Compactul K este interiorul pătratului:

$$\int y^2dx + xdy = \int\int_K (1-2y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^2 (1-2y)dy = -4.$$

b. Compactul K este discul de centru O şi rază 2; pentru calculul integralei duble folosim coordonatele polare (ρ, φ):

$$\int_\Gamma ydx + x^2dy = \int\int_K (2x-1)dxdy = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} (2\rho\cos\varphi - 1)\rho d\varphi = -4\pi.$$

c. Compactul K este interiorul elipsei; pentru calculul integralei duble folosim coordonatele polare generalizate:

$$\int_\Gamma ydx - xdy = \int\int_K 2dxdy = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} 2ab\rho d\varphi = 2\pi ab.$$

2. Fie $\alpha = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy$.
a. Să se calculeze integrala curbilinie $\int_{\mathcal{C}(O,R)} \alpha$, unde, am notat cu $\mathcal{C}(O,R)$ cercul de centru O şi rază $R > 0$.
b. Să se calculeze $\int_\Gamma \alpha$, unde, Γ este o curbă arbitrară închisă astfel încât $O \notin \Gamma$.
Soluţie
a. Să observăm, mai întâi că $\alpha \in \mathcal{C}^1(R^2\backslash\{O\})$, deci pentru calculul integralei de la punctul a nu se poate aplica formula Green-Riemann. Folosim definiţia integralei curbilinii; parametrizăm cercul:

$$x(t) = R\cos t,\ y(t) = R\sin t,\ t \in [0, 2\pi)$$

şi obţinem:

$$\int_{\mathcal{C}(O,R)} \alpha = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

b. Notăm cu K compactul mărginit de curba Γ. Distingem două cazuri: dacă $O \notin K$ (se poate aplica formula Green-Riemann) sau dacă $O \in K$ (nu se poate aplica formula Green-Riemann).
Presupunem mai întâi că $O \notin K$; atunci:

$$\int_\Gamma \alpha = \int\int_K \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right) dxdy = 0.$$

Presupunem acum că $O \in K$; fie $R > 0$ astfel încât $\mathcal{C}(O,R)$ este inclus în interiorul lui K. Notăm cu $D(O,R)$ discul deschis de centru O şi rază R. Fie A compactul $A = K \setminus D(O,R)$. Bordul orientat al lui A este reuniunea $\partial A = \Gamma \cup \mathcal{C}(O,R)$, sensul pe cerc fiind sensul trigonometric negativ. Deoarece $O \notin A$, avem:

$$\int_{\partial A} \alpha = \int\int_A 0 dxdy = 0.$$

Rezultă:

$$\int_\Gamma \alpha = \int_{\mathcal{C}(O,R)} \alpha = 2\pi.$$

3. Fie $\alpha = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\,dy$. Să se calculeze integrala curbilinie $\displaystyle\int_\Gamma \alpha$, unde Γ este o curbă arbitrară închisă cu $O \notin \Gamma$.

Soluţie

Observăm că α este o 1-formă diferenţială închisă. În continuare aplicăm raţionamentul de la exerciţiul precedent.

4. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii direct şi aplicând formula Green-Riemann:

a. $\displaystyle\int_\Gamma e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,(-ydx + xdy)$, $\Gamma = \{(x,y) \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\}$.

b. $\displaystyle\int_\Gamma xydx + \frac{x^2}{2}dy$,
$\Gamma = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1, x \le 0 \le y\} \cup \{(x,y) \mid x+y = -1, x \le 0, y \le 0\}$.

Soluţie

Pentru calculul direct se parametrizează cele două curbe şi se aplică definiţia integralei curbilinii. Vom calcula acum integralele cu ajutorul formulei Green-Riemann.

a. Elipsa Γ este închisă iar 1-forma diferenţială este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe R^2,

deci putem aplica formula Green-Riemann (notăm K mulţimea compactă mărginită de Γ):

$$\int_\Gamma e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\left(-ydx+xdy\right)=\int\int_K 2e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy,$$

integrala dublă calculându-se cu coordonate polare generalizate.
b. Curba Γ nu este închisă, deci nu putem aplica direct formula Green-Riemann. Fie $A(0,-1)$ şi $B(0,1)$ şi fie $[AB]$ segmentul orientat (de la A către B) determinat de aceste puncte. Fie $\Lambda=\Gamma\cup[AB]$; atunci Λ este o curbă închisă şi deci, aplicând formula Green-Riemann, obţinem (notăm cu K compactul mărginit de Λ):

$$\int_\Lambda xydx+\frac{x^2}{2}dy=\int\int_K 0dxdy=0.$$

Rezultă deci:

$$\int_\Gamma xydx+\frac{x^2}{2}dy=-\int_{[AB]}xydx+\frac{x^2}{2}dy=0,$$

ultima integrală curbilinie calculându-se imediat cu definiţia.

5. Să se calculeze aria mulţimii mărginite de curba Γ în următoarele cazuri:
a. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $(a>0,\,b>0)$.
b. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$.
Soluţie
Aria mulţimii mărginite de curba Γ este $\mathcal{A}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Gamma xdy-ydx$.
a. Cu parametrizarea $x(t)=a\cos t$, $y(t)=b\sin t$, $t\in[0,2\pi)$, obţinem:

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\int_\Gamma ab\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=\pi ab.$$

b. Cu parametrizarea $x(t)=\cos^3 t$, $y(t)=\sin^3 t$, $t\in[0,2\pi)$, obţinem:

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\int_\Gamma xdy-ydx=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{3}{8}\pi.$$

6. a. Fie $\rho = \rho(t)$, $t \in [a, b]$ ecuaţia în coordonate polare a unei curbe închise Γ. Să se demonstreze că aria interiorului lui Γ este $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_a^b \rho^2(t)dt$. Fie $a > 0$, $b > 0$; să se calculeze ariile mulţimilor mărginite de curbele de ecuaţii (în coordonate polare):

b. $\rho(t) = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}$, $t \in [0, 2\pi]$.

c. $\rho(t) = a(1 + \cos t)$, $t \in [0, \pi]$.

Soluţie

a. Cu parametrizarea $x(t) = \rho(t)\cos t$, $y(t) = \rho(t)\sin t$, $t \in [a, b]$, obţinem:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_\Gamma x dy - y dx = \frac{1}{2}\int_a^b \rho^2(t)dt.$$

b. $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{a^2b^2}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}dt = 2a^2b^2 \int_0^\infty \frac{du}{a^2u^2 + b^2} = \pi ab.$

c. Analog.

7. Să se calculeze circulaţia câmpului de vectori $\overline{V}$ pe curba Γ în cazurile:

a. $\overline{V} = y^2\overline{i} + xy\overline{j}$,
$\Gamma = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1, y > 0\} \cup \{(x, y); y = x^2 - 1, y \leq 0\}$.

b. $\overline{V} = e^x \cos y\overline{i} - e^x \sin y\overline{j}$.
Γ este o curbă arbitrară conţinută în semiplanul superior care uneşte punctele $A(1, 0)$ şi $B(-1, 0)$, sensul fiind de la A către B.

Soluţie

a. Vom aplica formula Green-Riemann; notând cu K interiorul curbei Γ, obţinem:

$$\int_\Gamma \overline{V}d\overline{r} = \int\int_K -ydxdy = -\int_{-1}^1 dx \int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} ydy.$$

b. Curba nu este închisă; fie $[BA]$ segmentul orientat (de la B către A) şi fie curba închisă $\Lambda = \Gamma \cup [BA]$. Calculăm circulaţia lui $\overline{V}$ pe curba Λ cu ajutorul formulei Green-Riemann (notăm cu K compactul mărginit de Λ):

$$\int_\Lambda \overline{V}d\overline{r} = \int\int_K 0dxdy = 0,$$

deci circulaţia pe curba Γ este egală cu circulaţia pe segmentul orientat $[AB]$:

$$\int_\Gamma \overline{V}d\overline{r} = \int_{[AB]} \overline{V}d\overline{r} = -\int_0^1 e^t dt = 1 - e.$$

8. Fie $a < b$, fie $\gamma : [a, b] \mapsto R^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, un drum parametrizat închis $(\gamma(a) = \gamma(b))$, orientat în sens trigonometric pozitiv şi fie K compactul mărginit de imaginea lui γ. Într-un punct arbitrar $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, considerăm vectorul normal la γ, $\overline{n}(t) = (y'(t), -x'(t))$. Să se demonstreze că pentru orice câmp de vectori $\overline{V}$ de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui K, avem:

$$\int_a^b \overline{V}(\gamma(t))\overline{n}(t)dt = \int\int_K \operatorname{div}(\overline{V})dxdy.$$

Soluţie
Din definiţia integralei curbilinii, rezultă:

$$\int_a^b \overline{V}(\gamma(t))\overline{n}(t)dt = \int_\gamma Pdy - Qdx.$$

Aplicând ultimei integrale curbilinii formula Green-Riemann, obţinem:

$$\int_a^b \overline{V}(\gamma(t))\overline{n}(t)dt = \int_\gamma Pdy - Qdx =$$

$$= \int\int_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = \int\int_K \operatorname{div}(\overline{V})dxdy.$$

9. Formula de medie pentru funcţii armonice
O funcţie $f : U \subseteq R^2 \mapsto R$ se numeşte armonică pe U dacă

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \,\text{pe}\, U.$$

Fie f o funcţie armonică pe discul unitate. Atunci:

$$f((0,0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos t, \rho\sin t)dt,\ \forall \rho \in (0,1),$$

egalitate numită formula de medie pentru funcţii armonice.
Soluţie
Fie $\rho \in (0,1)$ şi fie

$$g(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos t, \rho\sin t)dt.$$

Vom demonstra că funcţia g este constantă.
Pentru aceasta, calculăm derivata sa:

$$g'(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos t, \rho\sin t)\cos t + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos t, \rho\sin t)\sin t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos t,\rho\sin t),\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos t,\rho\sin t)\right)\cdot(\rho\cos t,\rho\sin t)\,dt.$$

Vom aplica acum rezultatul exerciţiului 8 de mai sus.
Vectorul $\overline{n} = (\rho\cos t,\rho\sin t)$ este vectorul normal (exterior) la cercul de centru O şi rază ρ, iar câmpul vectorial $\overline{V} = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}$. Obţinem (notăm cu K discul de centru O şi rază ρ):

$$g'(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho}\int\int_K \Delta f\,dxdy = 0.$$

Rezultă deci că funcţia g este constantă pe intervalul $(0,1)$; în consecinţă, avem:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos t,\rho\sin t)dt = g(\rho) = \lim_{\rho\to 0} g(\rho) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f((0,0)) = f((0,0)).$$

9.3 Formula Gauss-Ostrogradski

10. Să se calculeze integrala de suprafaţă $\int_\Sigma \omega$ în următoarele cazuri:
a. $\omega = x^2dy\wedge dz - 2xydz\wedge dx + z^3dx\wedge dy$.
$\Sigma = \{(x,y,z)\,;\, x^2+y^2+z^2 = 9\}$.
b. $\omega = yzdy\wedge dz - (x+z)dz\wedge dx + (x^2+y^2+3z)dx\wedge dy$.
$\Sigma = \{(x,y,z); x^2+y^2 = 4-2z, z\geq 1\}\cup\{(x,y,z); x^2+y^2\leq 4-2z, z=1\}$.
c. $\omega = x(z+3)dy\wedge dz + yzdz\wedge dx - (z+z^2)dx\wedge dy$.
$\Sigma = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 = 1,\ z\geq 0\}$.
Soluţie
a. Fie $K = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2\leq 9\}$;
aplicând formula Gauss-Ostrogradski (sunt verificate ipotezele), obţinem:

$$\int_\Sigma x^2dy\wedge dz - 2xydz\wedge dx + z^3dx\wedge dy = \int\int\int_K 3z^2dxdydz,$$

integrala triplă calculându-se folosind coordonate sferice.
b. Fie K compactul mărginit de suprafaţa (închisă) Σ şi fie
$D = \{(x,y);\, x^2+y^2\leq 2\}$ proiecţia lui K pe planul xOy; aplicând formula Gauss-Ostrogradski, obţinem:

$$\int_\Sigma \omega = \int\int\int_K 3dxdydz = 3\int\int_D dxdy\int_1^{2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dz.$$

c. Suprafaţa Σ nu este închisă, deci formula Gauss-Ostrogradski nu se poate aplica.
Fie $D = \{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 \leq 1,\, z = 0\}$ şi fie $S = \Sigma \cup D$, orientată cu normala exterioară (pe D normala este $-\overline{k}$). Fie K compactul al cărui bord (orientat) este suprafaţa (închisă) S. Aplicând formula Gauss-Ostrogradski, obţinem:

$$\int_S x(z+3)dy \wedge dz + yzdz \wedge dx - (z+z^2)dx \wedge dy = \int\int\int_K 2dxdydz = \frac{4\pi}{3}.$$

Rezultă deci:

$$\int_\Sigma x(z+3)dy \wedge dz + yzdz \wedge dx - (z+z^2)dx \wedge dy =$$

$$= \frac{4\pi}{3} - \int_D x(z+3)dy \wedge dz + yzdz \wedge dx - (z+z^2)dx \wedge dy.$$

Calculând ultima integrală de suprafaţă cu definiţia, obţinem:

$$\int_D x(z+3)dy \wedge dz + yzdz \wedge dx - (z+z^2)dx \wedge dy = -\int\int_D 0dxdy = 0,$$

şi deci $\int_\Sigma \omega = \frac{4\pi^3}{3}$.

11. Să se calculeze integrala de suprafaţă $\int_\Sigma \omega$ direct şi folosind formula Gauss-Ostrogradski în următoarele cazuri:
a. $\omega = x(y-z)dy \wedge dz + y(z-x)dz \wedge dx + z(x-y)dx \wedge dy$.
$\Sigma = \{(x, y, z)\,;\, z = 1 - x^2 - y^2, z > 0\} \cup \{(x, y, z)\; x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$.
b. $\omega = x^2(y-z)dy \wedge dz + y^2(z-x)dz \wedge dx + z^2(x-y)dx \wedge dy$.
$\Sigma = \{(x, y, z); z^2 = x^2 + y^2, 0 < z \leq 1\}$.
Soluţie
Analog cu exerciţiul anterior; în cazul b trebuie să reunim la Σ discul $D = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$, orientat după normala $\overline{k}$. Obţinem $\int_\Sigma \omega = -\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^2(\cos\varphi - \sin\varphi)d\varphi = 0$.

12. Fie a, b, c trei numere strict pozitive. Să se calculeze fluxul câmpului vectorial:

$$\overline{V} = x(xy + az)\overline{i} - y(xy - az)\overline{j} + z^3\overline{k}$$

prin suprafaţa Σ de ecuaţie:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Soluţie
Ecuaţia suprafeţei Σ se poate scrie sub forma echivalentă:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}},$$

deci $z\in[-c,c]$. Intersecţiile suprafeţei Σ cu plane orizontale ($z=$ constant) sunt elipsele $S(z)$ de ecuaţii:

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt[4]{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt[4]{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}=1.$$

Semiaxele acestor elipse sunt

$$a\sqrt[4]{1-\frac{z^2}{c^2}}\ \text{ şi }\ b\sqrt[4]{1-\frac{z^2}{c^2}}.$$

Fie $D(z)$ mulţimea (din planul orizontal $z=$ constant) mărginită de elipsa $S(z)$; atunci aria lui $D(z)$ este:

$$\mathcal{A}(z)=\pi ab\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}.$$

Pentru calculul fluxului se poate aplica formula Gauss-Ostrogradski; fie $\overline{n}$ normala exterioară la Σ şi fie Ω compactul mărginit de Σ; atunci:

$$\int_\Sigma \overline{V}\overline{n}\,d\sigma=\int\int\int_\Omega \operatorname{div}(\overline{V})\,dxdydz=\int_{-c}^{c}dz\int\int_{D(z)}(2az+3z^2)\,dxdy=$$

$$=\pi ab\int_{-c}^{c}(2az+3z^2)\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\,dz=3\pi ab\int_{-c}^{c}z^2\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\,dz=$$

$$=6\pi ab\int_0^c z^2\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}dz=6\pi ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(c\sin t)^2\sqrt{1-\sin^2 t}\,c\cos t\,dt=$$

$$=\frac{3}{2}\pi abc^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt=\frac{3}{8}\pi^2abc^3.$$

13. Legea lui Gauss
Pentru orice $q>0$, considerăm câmpul scalar

$$f(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{q}{4\pi r}$$

şi fie câmpul de gradienţi:

$$\overline{E} = -\text{grad} f.$$

Câmpul scalar f reprezintă potenţialul electric (sau potenţial Newtonian) asociat sarcinei electrice q plasate în O, iar $\overline{E}$ este câmpul electric generat (sau câmp Newtonian).

a. Să se expliciteze $\overline{E}$ şi să se demonstreze că este câmp solenoidal, adică: $\text{div}\overline{E} = 0$.

b. Să se demonstreze că fluxul câmpului $\overline{E}$ prin orice suprafaţă închisă ce nu conţine originea în interior este nul.

c. Să se demonstreze că fluxul câmpului $\overline{E}$ prin orice suprafaţă închisă ce conţine originea în interior este q, (legea lui Gauss).

Soluţie

a. Putem calcula $\overline{E}$ direct cu definiţia, sau aplicând proprietăţile gradientului; obţinem:

$$\overline{E} = -\text{grad} f = \frac{q}{4\pi}\frac{\overline{r}}{r^3}.$$

Arătăm acum că $\overline{E}$ este solenoidal:

$$\text{div}\overline{E} = -\text{grad}(\text{div} f) = -\Delta f = \frac{q}{4\pi r^6}\left(3r^3 - 3r(x^2+y^2+z^2)\right) = 0.$$

b. Fie Σ o suprafaţă închisă ce nu conţine originea în interior. Deoarece câmpul electric $\overline{E}$ este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $R^3 \setminus \{O\}$, sunt îndeplinite ipotezele formulei Gauss-Ostrogradski şi deci, (notăm cu K compactul mărginit de Σ şi cu $\overline{n}$ versorul normalei exterioare la Σ), obţinem:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{E}) = \int_\Sigma \overline{E}\,\overline{n} d\sigma = \int\int\int_K \text{div}\overline{E} dxdydz = 0.$$

c. Fie acum Σ o suprafaţă închisă ce conţine originea în interior. Deoarece $\overline{E}$ nu este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe compactul K mărginit de Σ, ($\overline{E}$ nefiind de clasă $\mathcal{C}^1$ în origine), nu putem aplica formula Gauss-Ostrogradski pentru a calcula fluxul lui $\overline{E}$ prin Σ. Fie $R > 0$ astfel încât sfera de centru O şi rază R (notată în continuare cu S), să fie inclusă în interiorul lui Σ. Fie suprafaţa (închisă) $\Sigma_1 = \Sigma \cup S$, orientată după normala exterioară (deci pe S este normala interioară la sferă). Fie K_1 mulţimea compactă mărginită de Σ_1. Deoarece $O \notin K_1$, fluxul lui $\overline{E}$ prin Σ_1 este nul (conform (b)). Rezultă că fluxul lui $\overline{E}$ prin Σ este egal cu fluxul lui $\overline{E}$ prin S (orientată după normala exterioară $\overline{n} = \dfrac{\overline{r}}{R}$ la sferă):

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{E}) = \int_S \overline{E}\,\overline{n} d\sigma = \frac{q}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = q.$$

14. Fie $n \in N$ şi fie $q_\imath > 0$, $\forall \imath \in \{1, 2, .., n\}$. Fie $A_\imath$, $\imath \in \{1, 2, .., n\}$, n puncte în R^3 de coordonate $(x_\imath, y_\imath, z_\imath)$. Notăm cu $\overline{r_\imath}$ vectorul de poziţie al punctului $A_\imath$. Potenţialul electric generat de sarcinile electrice $q_\imath$ plasate în punctele $A_\imath$ este

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\imath=1}^{n} \frac{q_\imath}{\| \overline{r} - \overline{r_\imath} \|},$$

unde, $\| \cdot \|$ este norma euclidiană în R^3. Fie $\overline{E} = -\text{grad} f$ câmpul electric asociat potenţialului f. Să se demonstreze că fluxul câmpului electric $\overline{E}$ printr-o suprafaţă arbitrară închisă ce conţine toate punctele $A_\imath$ în interiorul ei este egal cu $\sum_{\imath=1}^{n} q_\imath$.

Soluţie

Se aplică raţionamentul din exerciţiul anterior.

15. Legea lui Arhimede

Considerăm un recipient (conţinut în semispaţiul $z < 0$) în care s-a turnat un lichid având densitatea constantă c.

Scufundăm în lichid un corp pe care îl asimilăm cu un compact cu bord orientat $(K, \partial K)$. Presupunând că presiunea exercitată de lichid asupra corpului scufundat creşte proporţional cu adâncimea, obţinem pentru câmpul presiunilor formula $\overline{V} = cz\overline{k}$. Forţa ascensională pe care lichidul o exercită asupra corpului scufundat este, prin definiţie, egală cu fluxul câmpului presiunilor prin suprafaţa (bordul) ∂K, în raport cu normala exterioară, $\overline{n}$. Aplicând formula Gauss-Ostrogradski, obţinem:

$$\mathcal{F}_{\partial K}(\overline{V}) = \int_{\partial K} \overline{V}\, \overline{n} d\sigma =$$

$$= \int\int\int_K \text{div}\overline{V}\, dxdydz = \int\int\int_K c dxdydz = c\, \text{vol}(K),$$

adică forţa ascensională este egală cu masa lichidului dezlocuit de corpul scufundat.

16. Fie Σ o suprafaţă închisă şi fie K compactul mărginit de Σ. Să se demonstreze că:

$$\frac{1}{3} \int_\Sigma \overline{r}\, \overline{n} d\sigma = \text{vol}\,(K)\,,$$

unde, $\overline{n}$ este normala exterioară la Σ.

Soluţie

Se aplică formula Gauss-Ostrogradski:

$$\frac{1}{3}\int_{\Sigma}\overline{r}\,\overline{n}d\sigma=\frac{1}{3}\int\int\int_{K}\mathrm{div}(\overline{r})\,dxdydz=\int\int\int_{K}dxdydz=\mathrm{vol}(K).$$

17. Fie câmpul vectorial $\overline{V}=\overline{r}+\dfrac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}\,\overline{r}$ şi fie suprafaţa

$$\Sigma=\{(x,y,z);z=3-x^2-y^2,1\leq z\}\cup\{(x,y,z);x^2+y^2\leq 2,z=1\}.$$

Să se calculeze fluxul lui $\overline{V}$ prin Σ (orientată după normala exterioară).

Soluţie

Se aplică formula Gauss-Ostrogradski; pentru aceasta, calculăm

$$\mathrm{div}\overline{V}=\mathrm{div}\left(\overline{r}+\frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}\overline{r}\right)=3+\left(\frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}\right)\mathrm{div}\overline{r}+\overline{r}\mathrm{grad}\left(\frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}\right)=$$

$$=3+3\frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}+\overline{r}\left(\frac{1}{r^4}\mathrm{grad}(\overline{k}\,\overline{r})+(\overline{k}\,\overline{r})\mathrm{grad}r^{-4}\right)=$$

$$=3+3\frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}+\overline{r}\left(\frac{\overline{k}}{r^4}-4\frac{(\overline{k}\,\overline{r})}{r^6}\overline{r}\right)=3.$$

Notând cu K compactul mărginit de suprafaţa Σ, rezultă:

$$\mathcal{F}_{\Sigma}(\overline{V})=\int_{\Sigma}\overline{V}\,\overline{n}d\sigma=\int\int\int_{K}3dxdydz=3\mathrm{vol}(K).$$

18. Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $\overline{V}=\dfrac{1}{r}\,(\overline{r}\times\overline{k})$ prin:

a. O suprafaţă închisă arbitrară ce nu conţine originea în interior.

b. Sfera de centru O şi rază R.

Soluţie

a. În primul caz se poate aplica formula Gauss-Ostrogradski; fluxul este nul deoarece $\mathrm{div}\overline{V}=0$.

b. În cazul al doilea, fluxul se calculează cu definiţia integralei de suprafaţă (nu sunt îndeplinite ipotezele formulei Gauss-Ostrogradski); şi în acest caz fluxul este tot 0 deoarece vectorii $\overline{V}$ şi normala exterioară la sferă sunt ortogonali.

19. Formulele lui Green

Fie $(K, \partial K)$ un compact cu bord orientat din R^3. Fie $\overline{n}$ normala exterioară la ∂K şi fie f, g două funcţii de clasă $\mathcal{C}^2$ pe o vecinătate a lui K. Să se demonstreze formulele lui Green:

a. $\int_{\partial K} f\,(\text{grad}g)\,\overline{n}\,d\sigma = \int\int\int_K \Big(f\,\Delta g + (\text{grad}f)(\text{grad}g)\Big)\,dxdydz.$

b. $\int_{\partial K} \Big(f\,(\text{grad}g)\,-\,g\,(\text{grad}f)\Big)\,\overline{n}\,d\sigma = \int\int\int_K \Big(f\,\Delta g - g\,\Delta f\Big)dxdydz.$

Soluţie

a. Pentru prima formulă se aplică formula Gauss-Ostrogradski câmpului de vectori $\overline{V} = f\,\text{grad}g$:

$$\int_{\partial K} f\,(\text{grad}g)\,\overline{n}\,d\sigma = \int\int\int_K \text{div}(f\,\text{grad}g)\,dxdydz =$$

$$= \int\int\int_K \Big(f\,\text{div}(\text{grad}g) + (\text{grad}g)\,(\text{grad}f)\Big)\,dxdydz =$$

$$= \int\int\int_K \Big(f\Delta g + (\text{grad}g)\,(\text{grad}f)\Big)\,dxdydz.$$

b. A doua formulă rezultă direct din prima.

20. Fie $(K, \partial K)$ un compact cu bord orientat din R^3 şi fie $\overline{n}$ versorul normalei exterioare la suprafaţa ∂K. Fie h o funcţie armonică pe o vecinătate a lui K şi fie $\dfrac{dh}{d\overline{n}}$ derivata după direcţia $\overline{n}$ a lui h. Să se demonstreze egalităţile:

a. $\int_{\partial K} \dfrac{dh}{d\overline{n}}\,d\sigma = 0.$

b. $\int_{\partial K} h\,\dfrac{dh}{d\overline{n}}\,d\sigma = \int\int\int_K \parallel \text{grad}h \parallel^2 dxdydz.$

Soluţie

a. Se aplică prima formulă a lui Green pentru: $f = 1$ şi $g = h$; o altă metodă este de a aplica formula Gauss-Ostrogradski câmpului $\overline{V} = \text{grad}h$:

$$\int_{\partial K} \frac{dh}{d\overline{n}}\,d\sigma = \int_{\partial K} (\text{grad}h)\,\overline{n}\,d\sigma =$$

$$= \int\int\int_K \text{div}(\text{grad}h)\,dxdydz = \int\int\int_K \Delta h = 0.$$

b. Se aplică a doua formulă a lui Green pentru $f = g = h$; o altă metodă constă în a aplica formula Gauss-Ostrogradski pentru $\overline{V} = h\,\text{grad}h$:

$$\int_{\partial K} h\,\frac{dh}{d\overline{n}}\,d\sigma = \int\int\int_K h\,\text{grad}h\,\overline{n}\,d\sigma =$$

$$= \int\int\int_K \text{div}(h\,\text{grad}h)\; dxdydz =$$

$$= \int\int\int_K \Big(h\,\text{div}(\text{grad}h) + (\text{grad}h)\,(\text{grad}h)\Big)\; dxdydz =$$

$$= \int\int\int_K \Big(h\,\Delta g + \parallel \text{grad}h \parallel^2\Big)\; dxdydz = \int\int\int_K \parallel \text{grad}h \parallel^2\; dxdydz.$$

9.4 Formula lui Stokes

21. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, integrala curbilinie $\int_\Gamma \alpha$ în următoarele cazuri:
a. $\alpha = (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$.
$\Gamma : z = x^2 + y^2,\ z = 1$.
b. $\alpha = ydx + zdy + xdz$,
$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0$.
Soluţie
a. Fie suprafaţa $\Sigma = \{(x,y,z); z = x^2+y^2+z^2, z \le 1\}$; atunci Γ este bordul lui Σ şi aplicând formula lui Stokes obţinem (lăsăm ca exerciţiu verificarea compatibilităţii orientărilor):

$$\int_\Gamma (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz = \int_\Sigma -2(dy\wedge dz + dz\wedge dx + dx\wedge dy) =$$

$$= -2\int\int_D (-2x - 2y + 1)dxdy,$$

unde D este discul unitate.
b. Fie θ unghiul făcut de planul $x + y + z = 0$ cu planul xOy; atunci:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}) \cdot \overline{k} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Intersecţia dintre sferă şi plan este un cerc mare al sferei, notat Γ. Considerăm drept suprafaţă Σ porţiunea din planul $x + y + z = 0$ situată în interiorul sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Evident, aria lui Σ este π. Fie D proiecţia lui Σ pe planul xOy. Aria lui D (care este interiorul unei elipse) este:

$$\text{aria}(D) = \text{aria}(\Sigma) \cdot \cos\theta = \pi\,\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Rezultă:

$$\int_\Gamma ydx + zdy + xdz = -\int_\Sigma (dy\wedge dz + dz\wedge dx + dx\wedge dy) =$$

$$= -\int\int_D 3dxdy = -3\,\text{aria}(D) = -\sqrt{3}\pi.$$

22. Să se calculeze circulaţia câmpului vectorial

$$\overline{V} = (y^2+z^2)\overline{i} + (x^2+z^2)\overline{j} + (x^2+y^2)\overline{k}$$

pe curba $\Gamma:\ x^2+y^2+z^2 = R^2,\ ax+by+cz = 0.$

Soluţie

Curba Γ este un cerc mare al sferei (intersecţia sferei cu un plan ce trece prin centrul sferei); considerăm drept suprafaţă Σ oricare din cele două semisfere determinate de plan pe sferă. Aplicând formula lui Stokes, obţinem:

$$\int_\Gamma \overline{V}\,d\overline{r} = \int_\Sigma (\text{rot}\overline{V})\,\overline{n}\,d\sigma =$$

$$= \int_\Sigma (2(y-z)\overline{i} + 2(z-x)\overline{j} + 2(x-y)\overline{k}) \cdot \frac{1}{R}(x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k})\,d\sigma = 0,$$

deoarece versorul normalei (exterioare) la sferă, $\overline{n} = \frac{1}{R}\overline{r}$ şi $\text{rot}\overline{V}$ sunt perpendiculari.

23. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, integralele:

a. $\int_\Gamma y(y+2z)dx + 2x(y+z)dy + 2xydz$, $\Gamma:\ z^2 = x^2+y^2,\ x^2+y^2 = 2x.$

b. $\int_\Gamma 2zdx - xdy + xdz$, $\Gamma:\ z = y+1,\ x^2+y^2 = 1.$

Soluţie

a. Integrala este 0.

b. Considerând Σ porţiunea din planul $z = y+1$ situată în interiorul cilindrului $x^2+y^2 = 1$, şi aplicând formula lui Stokes, obţinem:

$$\int_\Gamma 2zdx - xdy + xdz = \int_\Sigma dz\wedge dx - dx\wedge dy = \int\int_D -2dxdy = -2\pi,$$

unde, D este discul unitate (proiecţia suprafeţei Σ pe planul xOy).

24. Să se calculeze direct şi cu formula lui Stokes integrala curbilinie

$$\int_\Gamma (y^2-z^2)dx + (z^2-x^2)dy + (x^2-y^2)dz,$$

unde Γ este poligonul de intersecţie dintre cubul $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ şi planul $x+y+z = \dfrac{3}{2}$.

Soluţie
Γ este un hexagon regulat. Pentru a calcula integrala cu definiţia trebuie parametrizate laturile hexagonului; de exemplu, latura din planul xOy are parametrizarea:

$$x(t) = t, y(t) = \frac{3}{2} - t,\ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Calculăm acum integrala aplicând formula lui Stokes. Fie Σ porţiunea din planul $x + y + z = \frac{3}{2}$ situată în interiorul cubului (interiorul hexagonului). Proiecţia lui Σ pe planul xOy este mulţimea

$$D = \{(x, y); \frac{1}{2} \leq x + y \leq \frac{3}{2},\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\},$$

a cărei arie este $\frac{3}{4}$. O parametrizare (carteziană) a suprafeţei Σ este

$$z = \frac{3}{2} - x - y,\ (x, y) \in D.$$

Aplicând formula lui Stokes, obţinem:

$$\int_\Gamma (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz =$$

$$= -2\int_\Sigma (x + y)dx \wedge dy + (y + z)dy \wedge dz + (z + x)dz \wedge dx =$$

$$= -2\int\int_D 3dxdy = -6\,\text{aria}(D) = -\frac{9}{2}.$$

25. Să se calculeze direct şi aplicând formula lui Stokes integrala

$$\int_\Gamma xdx + (x + y)dy + (x + y + z)dz,$$

pe curba Γ de ecuaţii:

$$x^2 + y^2 = R^2,\ z = x + y.$$

Soluţie
Pentru a calcula integrala direct parametrizăm

$$\Gamma:\ x(t) = R\cos t, y(t) = R\sin t, z(t) = R(\cos t + \sin t), t \in [0, 2\pi).$$

Pentru a aplica formula lui Stokes, considerăm suprafaţa Σ porţiunea din planul $z = x+y$ situată în interiorul cilindrului $x^2+y^2 = R^2$. Proiecţia lui Σ pe planul xOy este discul de centru O şi rază R, notat D. O parametrizare cartezianǎ pentru Σ este $z = x+y$, $(x, y) \in D$. Aplicând formula lui Stokes, obţinem:

$$\int_\Gamma xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz = \int_\Sigma dx \wedge dy + dy \wedge dz - dz \wedge dx =$$

$$= \int\int_D dxdy = \pi R^2.$$

26. Să se calculeze circulaţia câmpului de vectori $\overline{V} = \frac{1}{r}(\overline{k} \times \overline{r})$ pe curba $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, unde:
$\Gamma_1 = \{(x, y, z); x^2 + y^2 = 1, z = 0, x > 0, y > 0\}$
$\Gamma_2 = \{(x, y, z); y^2 + z^2 = 1, x = 0, y > 0, z > 0\}$
$\Gamma_3 = \{(x, y, z); z^2 + x^2 = 1, y = 0, z > 0, x > 0\}$.
Soluţie
Vom aplica formula lui Stokes; pentru aceasta, calculăm mai întâi rotorul câmpului $\overline{V}$:

$$\mathrm{rot}\overline{V} = \frac{1}{r}\,\mathrm{rot}(\overline{k} \times \overline{r}) - (\overline{k} \times \overline{r})\mathrm{grad}\frac{1}{r} =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\overline{k}\,\mathrm{div}\overline{r} - \overline{r}\,\mathrm{div}\overline{k} + \frac{d\overline{k}}{d\overline{r}} - \frac{d\overline{r}}{d\overline{k}}\right) + (\overline{k} \times \overline{r})\,\frac{\overline{r}}{r^3} = \frac{2\overline{k}}{r}.$$

Fie suprafaţa $\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$; evident, bordul lui Σ este Γ. Aplicând formula lui Stokes, obţinem:

$$\int_\Gamma \overline{V}\, d\overline{r} = \int_\Sigma \mathrm{rot}\overline{V}\,\overline{n}\, d\sigma,$$

unde, $\overline{n} = \overline{r}$ este versorul normalei exterioare la Σ. Pentru a calcula integrala de suprafaţă, putem folosi atât parametrizarea cartezianǎ cât şi coordonatele sferice; se obţine $\int_\Gamma \overline{V} d\overline{r} = \frac{\pi}{2}$.

27. Fie $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, şi fie punctele $A(a, 0, 0), B(0, b, 0)$ şi $C(0, 0, c)$. Fie Γ reuniunea segmentelor $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$ (cu acest sens). Să se calculeze $\int_\Gamma (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$.
Soluţie

Vom calcula integrala aplicând formula lui Stokes (lăsăm ca exerciţiu calculul direct). Fie Σ interiorul triunghiului ABC; obţinem:

$$\int_\Gamma (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz = \int_\Sigma 2dx \wedge dy + 2dy \wedge dz + 2dz \wedge dx.$$

Proiecţia lui Σ pe planul xOy este interiorul triunghiului OAB, iar parametrizarea carteziană este

$$z = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right).$$

Rezultă:

$$\int_\Gamma (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz = 2\int\int_{OAB} \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1\right) dxdy =$$

$$= ab + bc + ca.$$

28. Fie $\overline{V} = (x^2 + y - 4)\overline{i} + 3xy\overline{j} + (2xz + z^2)\overline{k}$ şi fie semisfera

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z \geq 0\}.$$

Să se calculeze fluxul câmpului $\text{rot}\,(\overline{V})$ prin Σ, orientată cu normala exterioară (la sferă).

Soluţie

Fluxul cerut este:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\text{rot}(\overline{V})) = \int_\Sigma \text{rot}(\overline{V}) \cdot \overline{n}\, d\sigma,$$

unde, $\overline{n}$ este normala exterioară la Σ. Integrala de suprafaţă se poate calcula atât direct (cu definiţia) cât şi cu formula lui Stokes; pentru aceasta, fie Γ cercul de intersecţie dintre Σ şi planul xOy. Ecuaţiile lui Γ sunt:

$$x^2 + y^2 = 16,\ z = 0.$$

Orientarea pe Γ este orientarea pozitivă a cercului în planul xOy. Aplicând formula lui Stokes, rezultă:

$$\int_\Sigma \text{rot}(\overline{V}) \cdot \overline{n}\, d\sigma = \int_\Gamma \overline{V}\, d\overline{r} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left((16\cos^2 t + 4\sin t - 4)(-4\sin t) + (48\sin t\, \cos^2 t)\right) dt = -16\pi.$$

29. Fie $a > 0$, $b > 0$ şi fie Γ intersecţia cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$ cu planul $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{b} = 1$. Să se calculeze, (aplicând formula lui Stokes), circulaţia câmpului vectorial $\overline{V} = x\,\overline{i} + (y - x)\,\overline{j} + (z - x - y)\,\overline{k}$ de-a lungul curbei Γ (orientarea pe Γ nu este precizată).

Soluţie

Fie Σ porţiunea din planul $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{b} = 1$ din interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$:

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in R^3 \mid \frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1,\ \ x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Atunci, conform formulei lui Stokes, rezultă:

$$\int_\Gamma \overline{V}\, d\overline{r} = \int_\Sigma \mathrm{rot}(\overline{V}) \cdot \overline{n}\, d\sigma,$$

orientările pe Γ şi Σ fiind compatibile. Parametrizăm cartezian Σ:

$$z = b\left(1 - \frac{x}{a}\right), (x, y) \in D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Rezultă vectorii tangenţi la Σ:

$$\left(1, 0, -\frac{b}{a}\right) \ \text{şi}\ \ (0, 1, 0),$$

şi deci versorul normalei la Σ indus de parametrizarea aleasă este $\overline{n} = \dfrac{b}{a}\,\overline{i} + \overline{k}$. Rotorul câmpului $\overline{V}$ este $\mathrm{rot}\overline{V} = -\,\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$. Rezultă circulaţia:

$$\int_\Gamma \overline{V}\, \overline{r} = \int_\Sigma \mathrm{rot}(\overline{V}) \cdot \overline{n}\, d\sigma = -\pi a^2 \left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

30. Fie $(\Sigma, \partial\Sigma)$ o suprafaţă cu bord orientat, fie $\overline{n}$ versorul normalei la Σ şi fie $\overline{c}$ un vector constant. Să se demonstreze că circulaţia câmpului vectorial $\overline{V} = (\overline{c}\,\overline{r})\,\overline{r}$ pe curba $\partial\Sigma$ este egală cu $\displaystyle\int_\Sigma \overline{c}\,(\overline{r} \times \overline{n})\, d\sigma$.

Soluţie

Aplicăm formula lui Stokes:

$$\int_{\partial\Sigma} (\overline{c}\,\overline{r})\,\overline{r}\, d\overline{r} = \int_\Sigma \mathrm{rot}\Big((\overline{c}\,\overline{r})\,\overline{r}\Big)\,\overline{n}\, d\sigma =$$

$$= \int_\Sigma \Big((\overline{c}\,\overline{r})\,\mathrm{rot}\overline{r} - \overline{r} \times \mathrm{grad}(\overline{c}\,\overline{r}) \Big)\,\overline{n}\,d\sigma = \int_\Sigma (\overline{c} \times \overline{r})\,\overline{n}\,d\sigma = \int_\Sigma \overline{c}(\overline{r} \times \overline{n}) d\sigma.$$

31. Fie $(\Sigma, \partial\Sigma)$ o suprafaţă cu bord orientat, fie $\overline{n}$ versorul normalei la Σ şi fie f şi g două funcţii de clasă $\mathcal{C}^2$ pe o vecinătate a lui Σ. Să se demonstreze relaţiile:

$$\int_{\partial\Sigma} f\,\mathrm{grad} g\,d\overline{r} = \int_\Sigma \Big((\mathrm{grad} f) \times (\mathrm{grad} g) \Big)\,\overline{n} d\sigma.$$

$$\int_{\partial\Sigma} \left(f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(f\frac{\partial g}{\partial y} + g\frac{\partial f}{\partial y} \right) dy + \left(f\frac{\partial g}{\partial z} + g\frac{\partial f}{\partial z} \right) dz = 0.$$

Soluţie

Se aplică formula lui Stokes. Pentru prima egalitate:

$$\int_{\partial\Sigma} f\,\mathrm{grad}\,g\,d\overline{r} = \int_\Sigma \mathrm{rot}(f \cdot (\mathrm{grad}\,g)) \cdot \overline{n}\,d\sigma =$$

$$= \int_\Sigma \Big(f \cdot \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,g) - \mathrm{grad}\,g \times\ \mathrm{grad}\,f \Big) \cdot \overline{n}\,d\sigma =$$

$$= \int_\Sigma \Big((\mathrm{grad} f) \times (\mathrm{grad} g) \Big)\,\overline{n} d\sigma.$$

Pentru a doua egalitate, calculăm rotorul:

$$\mathrm{rot}\left(\left(f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x} \right) \overline{i} + \left(f\frac{\partial g}{\partial y} + g\frac{\partial f}{\partial y} \right) \overline{j} + \left(f\frac{\partial g}{\partial z} + g\frac{\partial f}{\partial z} \right) \overline{k} \right) = 0,$$

deci circulaţia este nulă (s-a folosit teorema de simetrie a lui Schwartz).

32. Fie $(\Sigma, \partial\Sigma)$ o suprafaţă cu bord orientat şi fie $\overline{n}$ versorul normalei la suprafaţa Σ.

a. Dacă f este o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $(0, \infty)$, să se calculeze circulaţia câmpului vectorial $\overline{V} = f(r)\overline{r}$ pe curba $\partial\Sigma$.

b. Dacă g este o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui Σ şi $\overline{c}$ este un vector constant, să se demonstreze că circulaţia câmpului de vectori $\overline{W}(x, y, z) = g(x, y, z)\,\overline{c}$ pe curba $\partial\Sigma$ este

$$\int_\Sigma \overline{c}\,(\overline{n} \times \mathrm{grad} g) d\sigma.$$

Soluţie

a. Aplicăm formula lui Stokes; pentru aceasta, calculăm

$$\mathrm{rot}\overline{V} = f(r)\,\mathrm{rot}\overline{r} - \overline{r} \times \mathrm{grad} f(r) = -\overline{r} \times \frac{f'(r)}{r}\overline{r} = \overline{0},$$

deci circulaţia este nulă.
b. Aplicăm formula lui Stokes; calculând rotorul câmpului $\overline{W}$, obţinem

$$\mathrm{rot}\overline{W} = -\overline{c} \times \mathrm{grad}g,$$

ceea ce conduce la rezultatul cerut.

33. Fie $(\Sigma, \partial\Sigma)$ o suprafaţă cu bord orientat, fie $f \in \mathcal{C}^1(R)$, $a \in R^3$ şi fie $\overline{V} = (\overline{a}\,\mathrm{grad}f(r))\,\overline{r}$, unde, $\overline{r}$ este vectorul de poziţie. Să se demonstreze:

$$\int_{\partial\Sigma} \overline{V}\, d\overline{r} = \int_{\Sigma} \frac{\overline{a} \times \overline{r}}{r}\, f'(r)\, \overline{n}\, d\sigma,$$

unde, $\overline{n}$ este versorul normalei la Σ.
Soluţie
Se aplică formula lui Stokes:

$$\int_{\partial\Sigma} \overline{V}\, d\overline{r} = \int_{\Sigma} \frac{\overline{a} \times \overline{r}}{r}\, f'(r)\overline{n}\, d\sigma = \int_{\Sigma} \mathrm{rot}\,((\overline{a}\ \mathrm{grad}f(r))\,\overline{r})\ \overline{n}\, d\sigma.$$

Calculăm acum rotorul lui $\overline{V}$; pentru aceasta, calculăm mai întâi:

$$\mathrm{grad}f(r) = f'(r)\,\mathrm{grad}r = f'(r)\,\frac{\overline{r}}{r}.$$

Obţinem:

$$\mathrm{rot}\,((\,\overline{a}\,\mathrm{grad}f(r)\,)\,\overline{r}) = \mathrm{rot}\left(\frac{(\,\overline{a}\ \overline{r}\,)}{r}\, f'(r)\ \cdot\ \overline{r}\right) =$$

$$= \frac{(\overline{a}\ \overline{r})}{r} f'(r)\ \mathrm{rot}\overline{r} - \overline{r} \times\ \mathrm{grad}\left(\frac{(\,\overline{a}\ \overline{r}\,)}{r} f'(r)\right)$$

$$= -\overline{r} \times \left(f'(r)\,\mathrm{grad}\left(\frac{(\,\overline{a}\ \overline{r}\,)}{r}\right) + \frac{(\,\overline{a}\,\overline{r}\,)}{r}\,\mathrm{grad}f'(r)\right) =$$

$$= -\overline{r} \times \left(f'(r)\,\frac{r\,\overline{a} - (\,\overline{a}\,\overline{r}\,)\ \frac{\overline{r}}{r}}{r^2} + \frac{(\,\overline{a}\ \overline{r}\,)}{r} f''(r)\,\frac{\overline{r}}{r}\right) =$$

$$= \frac{f'(r)}{r}\,(\overline{a} \times \overline{r}),$$

ceea ce încheie demonstraţia.

Capitolul 10

Exemple de teste pentru examen

10.1 Analiză matematică I

Testul 1.

I. Este spaţiul $(R^2, \| \ \|_2)$ complet ? Justificare.
II. Să se studieze convergenţa seriilor:
$\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt[3]{n^3+n^2}-n}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1} n!\left(\frac{a}{n}\right)^n, a \in R$
III. Să se construiască un şir al aproximaţiilor succesive care să conveargă la soluţia reală a ecuaţiei $x^3 + 12x - 1 = 0$.
IV. Să se studieze convergenţa punctuală şi uniformă a şirului de funcţii $f_n : [0, 1] \mapsto R$, $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$.
V. Să se studieze existenţa derivatelor parţiale şi a diferenţialei (în origine) pentru funcţia: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
VI. Să se determine maximul şi minimul funcţiei $f(x, y) = x^2+y^2-3x-2y+1$ pe mulţimea $K = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Testul 2.

I. Sunt următoarele afirmaţii adevărate? Justificare.
a. Orice funcţie de clasă $\mathcal{C}^1(R^2)$ este diferenţiabilă.
b. Dacă $f : R^2 \mapsto R$ are derivate parţiale în origine, atunci ea este diferenţiabilă în origine.

II. Să se studieze convergenţa uniformă a seriei: $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n^2}, x \in R$. Se poate deriva seria termen cu termen (pe R)?
III. Să se afle extremele locale ale funcţiei $f(x,y) = x^2 y e^{2x+3y}$, pe R^2.
IV. Să se calculeze aproximarea liniară a funcţiei $f(x,y,z) = \sqrt{\frac{x+1}{(y+1)(z+1)}}$ în vecinătatea originii.
V. Fie $\overline{r}$ vectorul de poziţie şi fie $f \in \mathcal{C}^1(R)$. Să se calculeze laplacianul funcţiilor $g(x,y,z) = f\left(\frac{1}{r}\right)$ şi $h(x,y,z) = f(r)$.
VI. Pe spaţiul Banach $(\mathcal{C}[a,b], \| \quad \|_\infty)$ al funcţiilor continue (reale) considerăm aplicaţia $J : \mathcal{C}[a,b] \mapsto R$, $J(f) = \int_a^b f(t)dt$. Este J funcţională liniară? Dar continuă?

Testul 3.

I. Teorema contracţiei.
II. Să se studieze convergenţa şi convergenţa absolută seriilor:
$\sum_{n\geq 1} \frac{n(2+i)^n}{3^n}$, $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$.
III. În spaţiul metric R, mulţimea $\{(-1)^n \frac{n-1}{n+1} \mid n \in N\} \cup \{-1, 1\}$ este închisă sau deschisă? Justificare.
IV. Să se dezvolte în serie de puteri centrate în zero funcţiile $f(x) = \sin 2x$ şi $g(x) = \ln(1+2x)$. Să se calculeze apoi suma seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
V. Fie funcţia $f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$
a. Să se arate că f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe R^2.
b. Să se arate că f are derivate parţiale mixte de ordinul al doilea în orice punct şi să se calculeze $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ în origine; este f de clasă $\mathcal{C}^2$ pe R^2 ?
VI. Să se afle extremele funcţiei $y = y(x)$ definite implicit de ecuaţia $x^3 + y^3 - 2xy = 0$.

Testul 4.

I. Teorema lui Taylor. Este adevărat că orice funcţie $f \in \mathcal{C}^\infty(R)$ se poate dezvolta în serie Taylor în vecinătatea oricărui punct?
II. Să se calculeze rotorul câmpului vectorial $\overline{V} = \frac{1}{r}(\overline{k} \times \overline{r})$.
III. Să se aproximeze cu o eroare mai mică decât 10^{-3} soluţia reală a ecuaţiei

$x^3 + 4x - 1 = 0$.

IV. Să se determine valorile extreme ale produsului xy când x şi y sunt coordonatele unui punct de pe elipsa de ecuaţie $x^2 + 2y^2 = 1$.

V. Să se studieze convergenţa punctuală şi uniformă a şirului $u_n : R \mapsto R$, $u_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $n > 0$.

VI. Să se studieze convergenţa seriei $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)}$, $a > -1$.

Testul 5.

I. Spaţiul metric al funcţiilor continue $(\mathcal{C}[a,b], \| \ \|_\infty)$ este complet ? Justificare.

II. Să se calculeze cu o eroare mai mică decât 10^{-2} integrala $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$.

III. Fie funcţia $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Să se studieze continuitatea, existenţa derivatelor parţiale de ordinul întâi şi diferenţiabilitatea în origine.

IV. Să se determine extremele locale ale funcţiei:
$f : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \mapsto R$, $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$.

V. Fie $g \in \mathcal{C}^1(R^2)$ şi fie funcţia $z = z(x,y)$ definită implicit de ecuaţia $g(y^2 - x^2, z - xy) = 0$. Să se calculeze expresia $E = y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y}$.

VI. Se poate deriva termen cu termen seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$, $x \in R$?

Testul 6.

I. Considerăm pe Q şi C metrica uzuală: $d(x,y) = |x - y|$. Să se stabilească dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false. Justificare.

a. Spaţiul metric (Q, d) este complet.

b. Spaţiul metric (C, d) este complet.

II. Să se studieze convergenţa seriei $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{an+1}{bn+1}\right)^n$, $a > 0$, $b > 0$.

III. Să se determine mulţimea de convergenţă (în R) a seriei de puteri:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)} x^n$, $a > 0$.

IV. Să se calculeze divergenţa câmpului vectorial $\overline{V} = \overline{r} + \frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}\overline{r}$, unde $\overline{k}$ este versorul axei Oz, iar $\overline{r}$ este vectorul de poziţie.

V. Să se determine valorile extreme ale funcţiei $f : R^3 \mapsto R$,

$f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$ pe mulţimea $\{(x,y,z) \in R^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
VI. Fie $f : (0,1] \mapsto R$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Să se studieze dacă f este uniform continuă.

Testul 7.

I. Serii de puteri, teorema lui Abel.
II. Să se dezvolte în serie în jurul originii funcţia $f(x) = \text{arctg}x$ şi să se calculeze cu o eroare mai mică decât 10^{-2} integrala $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\text{arctg}x}{x}\, dx$.
III. Fie $f : R^3 \mapsto R$; $f(x,y,z) = x^2 + yz - xy$ şi $a = (1,1,2)$. Să se determine versorul s stiind că $\frac{df}{ds}(a)$ este maxim.
IV. Să se determine extremele funcţiei $z = z(x,y)$, definite implicit de ecuaţia $z^3 + z + 20(x^2 + y^2) - 8(xy + x + y) = 0$.
V. Să se caracterizeze şirurile Cauchy şi cele convergente într-un spaţiu metric discret.
VI. Să se afle $f \in \mathcal{C}^2(R)$ ştiind că funcţia $u(x,y) = f(x^2 - y^2)$ este armonică pe R^2.

Testul 8.

I. Să se enunţe şi să se demonstreze trei criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi.
II. Fie $a, b \in R, a < b$. Să se demonstreze că $d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ este distanţă pe mulţimea funcţiilor continue $\mathcal{C}[a,b]$.
III. Să se calculeze suma seriei numerice $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$, folosind seria de puteri $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$.
IV. Să se studieze continuitatea şi existenţa derivatelor parţiale în origine ale funcţiei $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right)} & \text{dacă} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad xy = 0 \end{cases}$
V. Fie $F \in C^2(R^2)$. Funcţia $y = y(x)$ este definită implicit de ecuaţia

$$F(\sin x + y, \cos y + x) = 0.$$

Să se determine y'' în punctele critice ale lui y.
VI. Fie ecuaţia diferenţială $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$. Ce devine ecuaţia dacă

se face schimbarea de variabile $(x, y) \mapsto (t, y)$, unde $x = e^t$?

Testul 9.

I. În R (cu distanţa uzuală) orice şir Cauchy este convergent? Justificare.
II. Să se studieze convergenţa şi convergenţa absolută a seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln n}$.
III. Să se dezvolte în serie de puteri centrate în zero funcţia $f(x) = \arcsin x$ şi apoi să se calculeze suma seriei $1+ \sum_{n\geq 1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}$.
IV. Folosind dezvoltări limitate să se calculeze limita: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2}$.
V. Fie funcţia: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$
a. Să se arate că f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe R^2.
b. Să se arate f are derivate parţiale mixte de ordinul al doilea în origine şi să se calculeze $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ în origine; este funcţia f de clasă $\mathcal{C}^2$ pe R^2 ?
VI. Fie $a, b, c \in R,\ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$; să se determine valorile extreme ale funcţiei $f : R^3 \mapsto R,\ f(x, y, z) = ax + by + cz$, pe mulţimea $D = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$.

Testul 10.

I. Derivarea şi integrarea termen cu termen a şirurilor de funcţii.
II. Să se studieze convergenţa absolută pentru seria $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}$.
III. Pe spaţiul Banach complex $(\mathcal{C}[a, b], \| \ \|_\infty)$ considerăm operatorul: $(Mf)(x) = xf(x),\ \forall f \in \mathcal{C}[a, b],\ \forall x \in [a, b]$.
a. Să se demonstreze că M este liniar şi continuu şi $\| M \| = |b|$.
b. Să se demonstreze că spectrul lui M este : $\sigma(M) = [a, b]$.
c. Să se determine mulţimea valorilor proprii.
IV. Să se calculeze mulţimea de convergenţă (în C) a seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$, $z \in C$.
V. Este funcţia $g : R^2 \mapsto R$, $g(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$ de clasă $\mathcal{C}^1(R^2)$?
VI. Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei: $f(x, y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36x + 9$, $(x, y) \in R^2$.

10.2 Analiză matematică II

Testul 1.

I. Să se enunţe şi să se demonstreze două criterii de convergenţă absolută pentru integrala Riemann improprie.

II. Să se calculeze $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(x+1)^2}\, dx$.

III. Să se calculeze integrala:

$\int\int_D \left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy,\ D=\{(x,y)\in R^2\,;\, x^2+y^2-y\leq 0,\, x\geq 0\}$.

IV. Fie $0<k<R$; să se calculeze volumul mulţimii:

$\Omega=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq R^2,\ z\geq k\}$.

V. Fie câmpul vectorial $\overline{V}=\overline{r}+\frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}\,\overline{r}$ şi fie suprafaţa:

$\Sigma=\{(x,y,z); z=3-x^2-y^2, 1\leq z\}\cup\{(x,y,z); x^2+y^2\leq 2, z=1\}$.

Să se calculeze fluxul lui $\overline{V}$ prin Σ (orientată după normala exterioară).

VI. Ce relaţii de incluziune sunt între mulţimile:

i. $\ell^1(Z)$ şi $\ell^2(Z)$,

ii. $L^1[0,2\pi]$ şi $L^2[0,2\pi]$? Justificare.

Testul 2.

I. Formula Green-Riemann.

II. Să se studieze continuitatea funcţiei $F(y)=\int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{1+x^2}dx, \forall\, y\in R$.

III. Pe spaţiul Hilbert $\ell^2(N)$ considerăm operatorul:

$V:\ell^2(N)\longrightarrow\ell^2(N)$, $(Vx)(0)=0$ şi $(Vx)(n)=x(n-1)$, $\forall n\geq 1$. Să se calculeze valorile proprii ale lui V.

IV. Să se calculeze aria mulţimii plane D mărginite de curba de ecuaţie: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a$ şi b fiind două constante pozitive.

V. Să se calculeze aria submulţimii de pe sfera $x^2+y^2+z^2=1$, situate în interiorul conului $x^2+y^2=z^2$.

VI. Să se calculeze direct şi aplicând formula lui Stokes integrala

$\int_\Gamma xdx+(x+y)dy+(x+y+z)dz$, $\Gamma:\ x^2+y^2=R^2,\, z=x+y$.

Testul 3.

I. Formula Gauss-Ostrogradski.

II. Să se calculeze integrala: $J(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx, \alpha > 0, \alpha \neq 1.$

III. Să se calculeze integrala dublă:
$\int\int_D (x + 3y)dxdy$, D fiind mulţimea plană mărginită de curbele de ecuaţii $y = x^2 + 1$, $y = -x^2$, $x = -1$, $x = 3$.

IV. Să se calculeze aria paraboloidul $z = x^2 + y^2,\ z \in [0, h]$.

V. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unui arc de cerc de rază R şi de măsură $\alpha \in (0, \pi)$, presupus omogen.

VI. Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $\overline{V} = \frac{1}{r}(\overline{r} \times \overline{k})$ printr-o suprafaţă închisă arbitrară ce nu conţine originea în interior.

Testul 4.

I. Teorema lui Poincare.

II. Să se studieze convergenţa integralei $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3 - 1}}\, dx$

III. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x) = |x|,\ x \in [-\pi, \pi]$, prelungită prin periodicitate la întregul R. Să se deducă apoi suma seriei numerice: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ...$

IV. Fie $\alpha = \frac{x-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dy$. Să se calculeze integrala curbilinie $\int_\Gamma \alpha$, unde Γ este o curbă arbitrară închisă cu $O \notin \Gamma$.

V. Fie $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$, şi fie punctele $A(a, 0, 0), B(0, b, 0)$ şi $C(0, 0, c)$. Fie Γ reuniunea segmentelor $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$ (cu acest sens). Să se calculeze $\int_\Gamma (z - y)dx + (x - z)dy + (y - x)dz$ direct şi aplicând formula lui Stokes.

VI. Să se calculeze fluxul câmpului de vectori $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, prin suprafaţa de ecuaţie $z^2 = x^2 + y^2, z \in [0, 1]$.

Testul 5.

I. Formula lui Stokes.

II. Să se calculeze integrala $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}}, n \in N.$

III. Să se determine seria Fourier asociată funcţiei $f(x) = e^{ax},\ x \in (-\pi, \pi]$ şi apoi să se calculeze suma seriei de numere: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+a^2},\ a \neq 0.$

IV. Să se calculeze volumul mulţimii mărginite de suprafeţele de ecuaţii $z = 4 - x^2 - y^2,\ 2z = 5 + x^2 + y^2.$

V. Să se calculeze fluxul câmpului de vectori $\overline{V} = y\bar{i} - x\bar{j} + z^2\bar{k}$, prin suprafaţa de ecuaţie $z = x^2 + y^2,\ z \in [0, 1].$

VI. Să se calculeze masa firului material de ecuaţii parametrice:
$x(t) = t,\ y(t) = \frac{1}{2}t^2,\ z(t) = \frac{1}{3}t^3,\ t \in [0, 1]$, cu densitatea $F(x, y, z) = \sqrt{2y}.$

Testul 6.

I. Baze ortonormale în spaţii Hilbert şi serii Fourier.

II. Să se calculeze integrala $\int_0^1 \ln^p \left(\frac{1}{x}\right) dx, p > -1.$

III. Să se calculeze aria mulţimii plane mărginite de curba de ecuaţie $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2xy,\ a$ fiind o constantă pozitivă.

IV. Fie $\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$

a. Să se calculeze integrala curbilinie $\int_{\mathcal{C}(O,R)} \alpha$, unde, am notat cu $\mathcal{C}(O, R)$ cercul de centru O şi rază $R > 0$.

b. Să se calculeze $\int_\Gamma \alpha$, unde, Γ este o curbă arbitrară închisă astfel încât $O \notin \Gamma$.

V. Să se calculeze volumul mulţimii mărginite de suprafeţele de ecuaţii $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ y^2 + z^2 = x^2,\ x \geq 0.$

VI. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, integrala:
$\int_\Gamma y(y + 2z)dx + 2x(y + z)dy + 2xydz\ ,$
Γ fiind curba de ecuaţii $\Gamma:\ z^2 = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = 2x.$

Testul 7.

I. Serii trigonometrice.

II. Fie $\alpha > 0$. Să se calculeze $\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$.

III. Să se calculeze integrala dublă $\int\int_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$, D fiind mărginit de curbele de ecuaţii $x^2 + y^2 = e^2$, $y = x\sqrt{3}$, $x = y\sqrt{3}$, $x \geq 0$.

IV. Fie 1-forma diferenţială $\alpha = ydx + xdy, (x, y) \in R^2$.

i. Este α închisă? Dar exactă?

ii. Să se calculeze $\int_\Gamma \alpha$ pe un drum cu capetele $A(2, 1)$ şi $B(1, 3)$.

V. Să se calculeze spectrul şi norma operatorului diagonal:
$D_\alpha : \ell^2(N) \mapsto \ell^2(N)$, $(D_\alpha x)(n) = \alpha(n)x(n)$, unde $\alpha(n) = \frac{1}{n^2+1}$.
Este operatorul D_α inversabil ?

VI. Să se calculeze integrala de suprafaţă $\int_\Sigma x^2 dy\wedge dz - 2xydz\wedge dx + z^3 dx\wedge dy$, unde, $\Sigma = \{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$.

Testul 8.

I. Integrale cu parametri.

II. Să se calculeze integrala: $F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\cos^2 x + y^2 \sin^2 x\right) dx$, $\forall y > 0$.

III. Să se calculeze volumul mulţimii:
$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3\,;\, (x, y) \in D,\, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$,
dacă $D = \{(x, y) \in R^2\,;\, x^2 + y^2 \leq 2y\}$, şi $f(x, y) = x^2 + y^2$.

IV. Să se calculeze masa şi coordonatele centrului de greutate ale unei semisfere $\mathcal{S}$ de rază R şi având densitatea constantă c.

V. Fie $\overline{V} = (x^2 + y - 4)\overline{i} + 3xy\overline{j} + (2xz + z^2)\overline{k}$ şi fie semisfera
$\Sigma = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z \geq 0\}$.
Să se calculeze fluxul câmpului rot $(\overline{V})$ prin Σ, orientată cu normala exterioară (la sferă).

VI. Să se determine seria Fourier asociată funcţiei $f(x) = x^2$, $x \in (-\pi, \pi]$, prelungită prin periodicitate la R. Să se calculeze apoi sumele seriilor de numere: $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Testul 9.

I. Măsura şi integrala Lebesgue.

II. Să se calculeze integrala: $F(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right) \frac{dx}{\cos x},\ |a| < 1.$

III. Să se calculeze: $\int\int_D e^{x^2+y^2} dxdy,\ D = \{(x,y) \in R^2\,;\, x^2+y^2 \leq 1\}.$

IV. Să se calculeze norma şi valorile proprii ale operatorului
$W : \ell^2(Z) \to \ell^2(Z)\,,\ (Wx)(n) = x(n-1)\,,\ \forall n \in Z.$

V. Fie $P, Q, R : \Omega = \{(x,y,z)\,;\, y > 0, z \geq 0\} \mapsto R,$
$P = x^2 - yz + \frac{y}{x^2+y^2},\ Q = y^2 - zx - \frac{x}{x^2+y^2},\ R = z^2 - xy.$
Notând cu $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, să se calculeze $\int_\Gamma \omega$, unde Γ este un drum parametrizat arbitrar (inclus în Ω) ce uneşte punctele $A(1,1,0)$ şi $B(-1,1,0)$.

VI. Fie Σ o suprafaţă închisă şi fie K compactul mărginit de Σ. Să se demonstreze că: $\frac{1}{3}\int_\Sigma \overline{r}\,\overline{n}\,d\sigma = \mathrm{vol}\,(K)\,,$ $\overline{n}$ fiind normala exterioară la Σ.

Testul 10.

I. Funcţiile lui Euler.

II. Fie $f : [0,1] \times (0,\infty) \mapsto R,\ f(x,y) = \frac{x}{y^2}\, e^{-\left(\frac{x}{y}\right)^2}$ şi fie integrala parametru $F(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$. Să se calculeze: $\lim\limits_{y\to 0}\int_0^1 f(x,y)$ şi $\int_0^1 \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\,dx.$

III. Să se calculeze volumul mulţimii mărginite de suprafeţele de ecuaţii $x^2+y^2 = 1,\ z^2 = x^2+y^2,\ z \geq 0.$

IV. Să se calculeze aria submulţimii de pe paraboloidul $z = x^2+y^2$ situat în interiorul cilindrului $x^2+y^2 = 2y.$

V. Să se calculeze, aplicând formula Green-Riemann, $\int_\Gamma xydx + \frac{x^2}{2}\,dy,$
$\Gamma = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1, x \leq 0 \leq y\} \cup \{(x,y) \mid x+y = -1, x \leq 0, y \leq 0\}.$

VI. Să se calculeze integrala de suprafaţă:
$\int_\Sigma x^2(y-z)dy \wedge dz + y^2(z-x)dz \wedge dx + z^2(x-y)dx \wedge dy,$
unde $\Sigma = \{(x,y,z); z^2 = x^2+y^2, 0 < z \leq 1\}.$

Bibliografie

Lucrări teoretice
1. I. Colojoară
Analiză matematică, Ed. Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1983.
2. R. Courant
Differential and Integral Calculus, vol.1,2, Nordeman Publishing Co, 1945.
3. G.M. Fihtengolţ
Curs de calcul diferenţial şi integral, vol.1,2,3, Ed. Tehnică, 1965.
4. P. Flondor, O. Stănăşilă
Lecţii de analiză matematică, Ed. ALL, 1993.
5. L.V. Kantorovici, G.P. Akilov
Analiză funcţională, Ed. Ştiinţifică şi enciclopedică, 1986
6. M. Olteanu
Curs de analiză funcţională, Ed. Printech 2000.
7. C. P. Niculescu
Fundamentele analizei matematice, Ed. Academiei Române, 1996.
8. W. Rudin
Principles of mathematical analysis, Mc Graw Hill, N.Y. 1964.
9. O. Stănăşilă
Analiză liniară şi geometrie, Ed. ALL, 2000
10. O. Stănăşilă
Matematici speciale, Ed. ALL, 2001.
Culegeri de probleme
11. C.M. Bucur, M. Olteanu, Roxana Vidican
Calcul diferenţial - caiet de seminar, Ed. Printech, 2000.
12. N. Donciu, D. Flondor
Algebră şi analiză matematică, Ed. Did. Ped., Bucureşti, 1979.
13. Ioana Luca, Gh. Oprişan
Matematici avansate, Ed. Printech, 2001.
14. Ana Niţă, Tatiana Stănăşilă
1000 de probleme rezolvate şi exerciţii fundamentale, Ed. ALL, 1997.